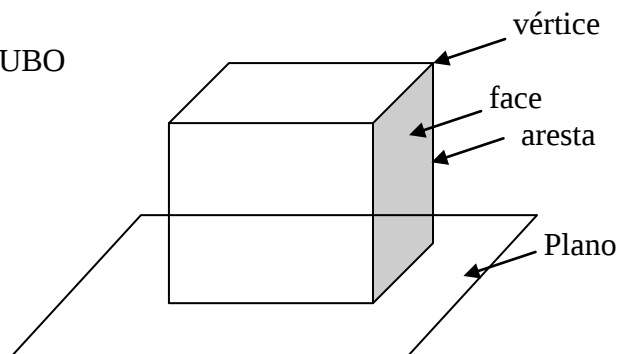


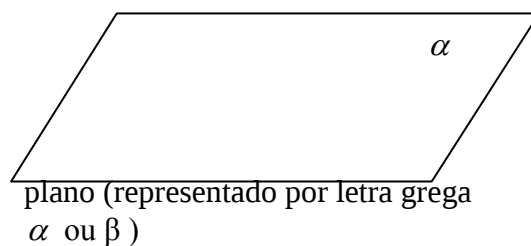
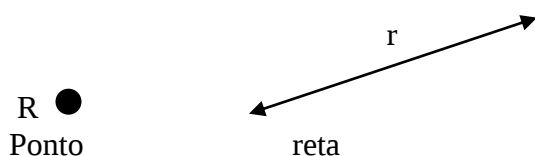


GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

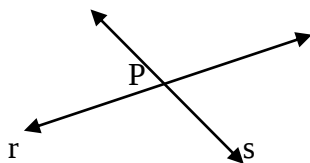
CUBO



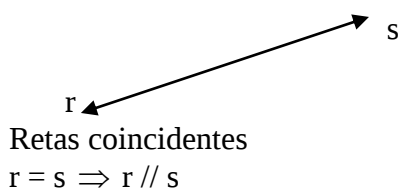
➤ Noções Primitivas



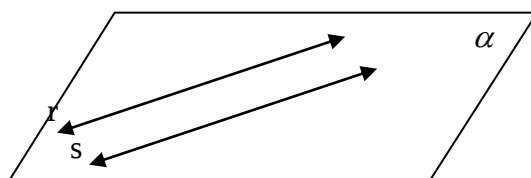
➤ Retas Concorrentes



➤ Retas Paralelas



Retas coincidentes
 $r = s \Rightarrow r // s$



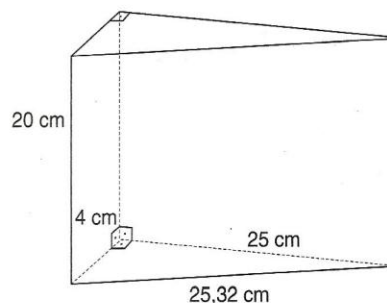
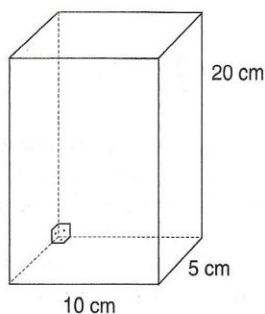
retas coplanares (Contidas em um mesmo plano)
 $r \subset \alpha, s \subset \alpha$ e $r \cap s = \Phi \Rightarrow r // s$

- Dois pontos distintos determinam uma única reta
- Três pontos não colineares determinam um único plano
- Se uma reta possui dois pontos distintos num plano, ela está contida nesse plano.
- Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.
- Dois planos distintos que têm um ponto comum são chamados **PLANOS SECANTES**.
- Se dois planos distintos têm um ponto comum, então eles tem pelo menos um outro ponto comum.
- Se dois planos distintos têm um ponto comum, então a interseção desses planos é uma única reta que passa por aquele ponto.
- Dois planos são **PARALELOS** quando não tem ponto comum ou são coincidentes.

Geometria métrica espacial

"O MÁXIMO COM O MÍNIMO"

Você já deve ter percebido que as embalagens nos supermercados são caixas (caixa de leite, de suco, etc). Evidentemente, os fabricantes querem que o volume que elas contêm seja o definido (por exemplo, 1 L) com o mínimo gasto de material possível. Vejamos dois exemplos de caixas:

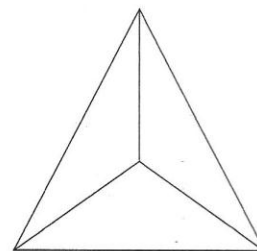
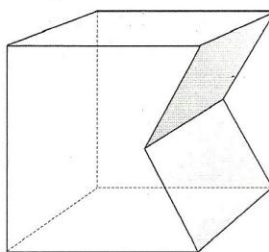
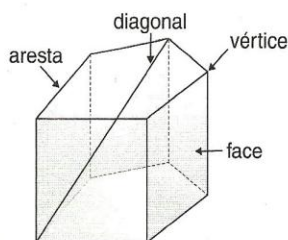


Ambas contêm o mesmo volume ($1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ L}$; você, neste capítulo, saberá calcular esse volume), porém, na primeira caixa utilizou-se uma área total de 700 cm^2 ($10 \cdot 5 + 10 \cdot 5 + 5 \cdot 20 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 20 + 10 \cdot 20$) em sua confecção, enquanto que na segunda utilizou-se uma área total de $1186,40 \text{ cm}^2$ ($2 \cdot \left(\frac{4 \cdot 25}{2}\right) + 20 \cdot 4 + 20 \cdot 25 + 20 \cdot 25,32$). Logo, a primeira caixa é a mais utilizada, pois oferece o mesmo volume com menor custo.

Este e outros problemas envolvendo sólidos geométricos, você estará apto a resolver ao término deste capítulo.

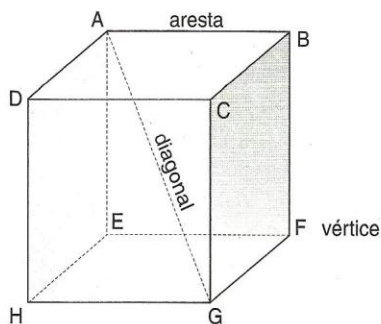
POLIEDROS

Chamamos de **poliedro** o sólido geométrico limitado por polígonos que possuem, dois a dois, um lado comum.



Elementos do poliedro

Os elementos básicos de um poliedro são: **faces**, **arestas**, **vértices** e **diagonais**.



Na figura dada, temos:

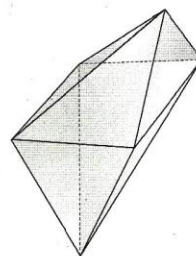
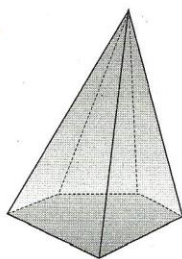
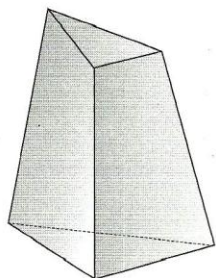
- 6 faces
- 12 arestas
- 8 vértices
- 4 diagonais

Observe

As diagonais de um poliedro unem dois vértices que não pertencem a uma mesma face.

Poliedro convexo

Um poliedro pode ser convexo ou côncavo. Dizemos que um poliedro é **convexo** quando em relação a uma face qualquer ele está inteiramente situado num mesmo semi-espço em relação a essa face.



Nota

O nosso estudo de métrica será efetuado nos principais sólidos geométricos convexos.

Nomenclatura dos poliedros

Em função do número de faces, os poliedros recebem os seguintes nomes:

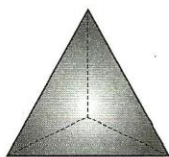
4 faces	→	tetraedro
5 faces	→	pentaedro
6 faces	→	hexaedro
⋮		⋮
10 faces	→	decaedro
⋮		⋮
12 faces	→	dodecaedro
⋮		⋮
20 faces	→	icosaedro

Poliedros regulares

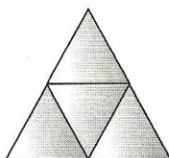
Um poliedro convexo é **regular** se suas faces são polígonos regulares com o mesmo número de lados e em cada vértice converge o mesmo número de arestas.

Existem apenas cinco tipos de poliedros regulares:

TETRAEDRO

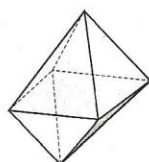


4 faces

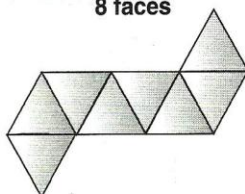


planificado

OCTAEDRO

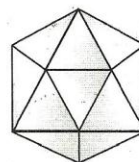


8 faces

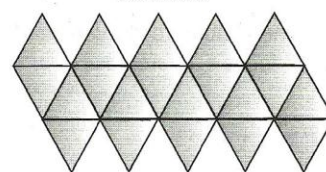


planificado

ICOSAEDRO

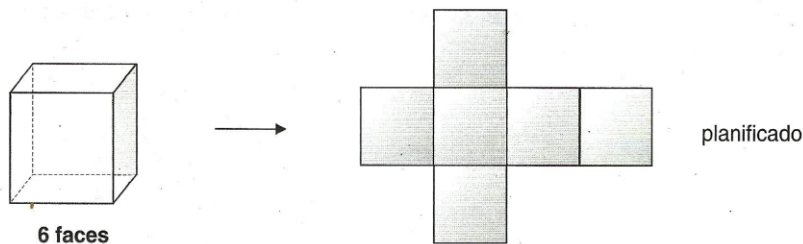


20 faces

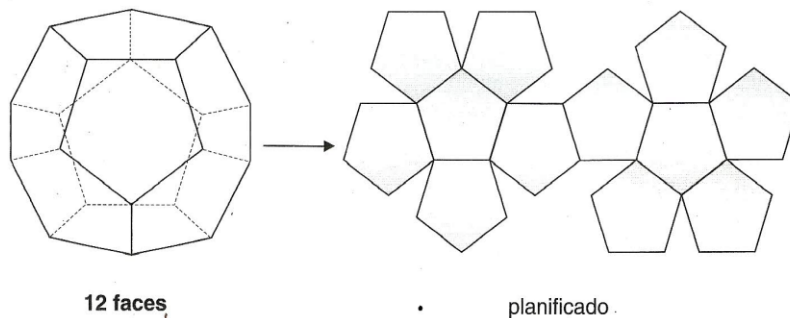


planificado

HEXAEDRO



DODECAEDRO



Relação de Euler

Em todo poliedro convexo, o número de vértices mais o número de faces é igual ao número de arestas mais dois.

$$V + F = A + 2$$

Exemplo:

Um poliedro convexo possui 4 faces triangulares e 3 faces hexagonais. Determine o número de faces, de arestas e de vértices desse poliedro.

Número de faces: $4 + 3 = 7 \Rightarrow F = 7$

Número de arestas: $\begin{cases} 4 \text{ faces triangulares} \Rightarrow 4 \times 3 = 12 \text{ arestas} \\ 3 \text{ faces hexagonais} \Rightarrow 3 \times 6 = 18 \text{ arestas} \end{cases}$
30 arestas

Como uma aresta é comum a duas faces, então ela foi contada duas vezes.

Logo, $2A = 30 \Rightarrow A = 15$

Número de vértices: $V + F = A + 2$
 $V + 7 = 15 + 2 \Rightarrow V = 10$

Resposta: O poliedro possui 7 faces, 15 arestas e 10 vértices.

EXERCÍCIOS

1. Determine o número de vértices de um poliedro convexo que possui 5 faces e 12 arestas.
2. Quantas faces possui um poliedro convexo de 10 vértices e 14 arestas?

3. Determine o número de arestas de um poliedro convexo de 8 vértices e 8 faces.
4. Determine o número de faces de um poliedro convexo, sabendo-se que o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades.
5. Um poliedro convexo possui 6 faces triangulares e 3 faces quadrangulares. Determine o número de arestas e de vértices desse poliedro.
6. Um poliedro convexo possui 5 faces triangulares, 4 faces quadrangulares e 3 faces pentagonais. Quantos vértices possui esse poliedro?

PRISMA

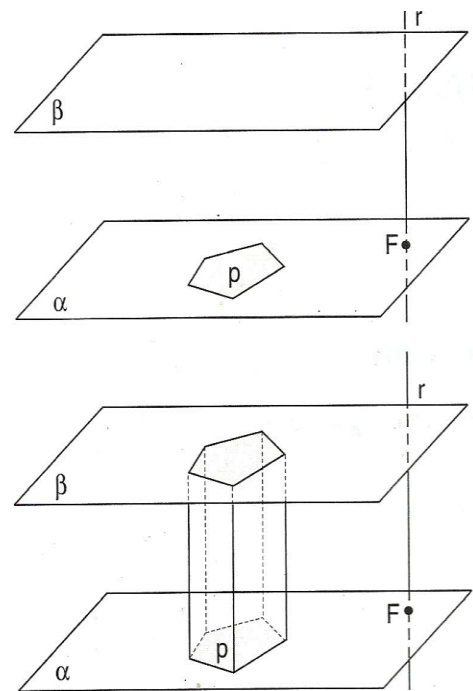
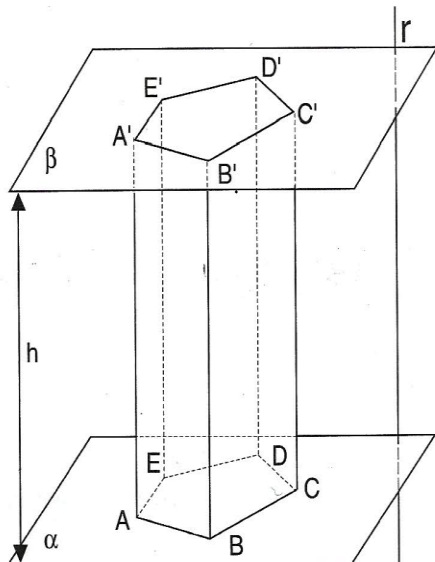
Definição

Seja a figura ao lado, onde:

- α e β são dois planos paralelos;
- p é um polígono contido em α ;
- r é uma reta que fura α no ponto F .

Se considerarmos, nesta figura, todos os segmentos paralelos a r , tais que uma extremidade é um ponto no polígono p e a outra extremidade é um ponto no plano β , temos um sólido geométrico chamado **prisma**.

Elementos do prisma



Os polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ são as **bases**.

Os lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}, \overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'D'}, \overline{D'E'}, \overline{E'A'}$ das bases, são as **arestas das bases**.

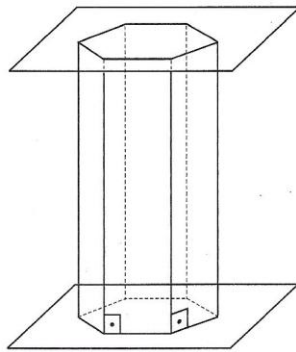
Os paralelogramos $AA'BB', BB'CC', CC'DD', DD'EE', EE'AA'$ são as **faces laterais**.

Os segmentos AA', BB', CC', DD', EE' , paralelos a r , são as **arestas laterais**.

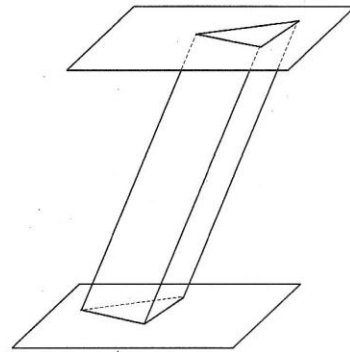
A distância entre α e β , planos das bases, é a **altura** (h).

Prisma reto e prisma oblíquo

Quando as arestas laterais de um prisma são perpendiculares aos planos das bases, o prisma é **reto**; quando não são, o prisma é **oblíquo**.



prisma hexagonal reto



prisma triangular oblíquo

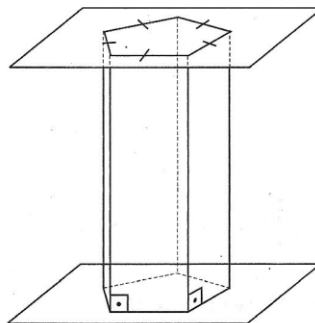
Observe

Se um prisma é reto, as faces laterais são retângulos.

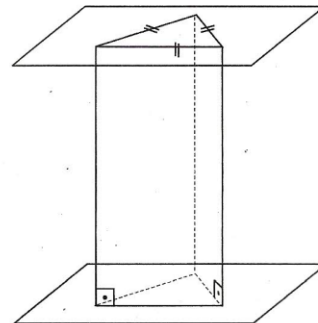
Prisma regular

Um prisma reto é **regular** quando as bases são polígonos regulares.

Exemplos:



prisma pentagonal regular



prisma triangular regular

Note

Se um prisma é regular, as arestas são perpendiculares aos planos das bases, e as bases são polígonos regulares; conseqüentemente, as faces laterais são retângulos congruentes entre si.

Área e volume de um prisma

Chamamos de **área lateral** (S_L) de um prisma à soma de todas as áreas de suas faces laterais. A **área total** (S_T) de um prisma é a soma da área lateral com as áreas das bases (S_B).

$$S_T = S_L + 2 \cdot S_B$$

O **volume de um prisma** é obtido pelo produto da área da base e a medida da altura do prisma.

$$V = S_B \cdot h$$

Lembre-se

A área de um triângulo retângulo é $\frac{\text{cateto} \times \text{cateto}}{2}$.

A área de um triângulo equilátero de lado ℓ é $\frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$.

A área de um hexágono regular de lado ℓ é $\frac{3\ell^2 \sqrt{3}}{2}$.

Exemplo:

A altura de um prisma triangular regular é igual a 8 cm.

Calcule a área total e o volume desse prisma sabendo-se que a aresta da base mede 4 cm.

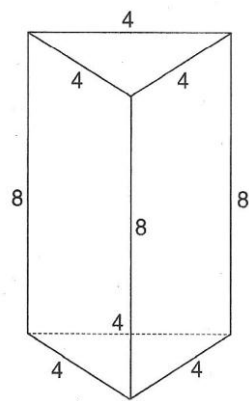
Prisma triangular regular $\Rightarrow$ as bases são triângulos equiláteros.

$$\text{Área da base: } S_B = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_B = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{Área lateral: } S_L = 8 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 8 \cdot 4 \Rightarrow S_L = 96 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total: } S_T = 2 \cdot S_B + S_L \Rightarrow S_T = (2 \cdot 4\sqrt{3} + 96) \text{ cm}^2 \Rightarrow S_T = 8(\sqrt{3} + 12) \text{ cm}^2$$

$$\text{Volume: } V = S_B \cdot h \Rightarrow V = 4\sqrt{3} \cdot 8 \Rightarrow V = 32\sqrt{3} \text{ cm}^3$$



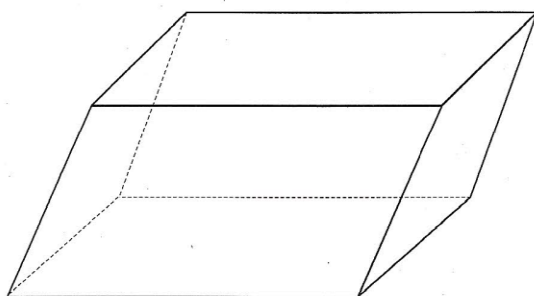
EXERCÍCIOS

- Determine a área da base, a área lateral, a área total e o volume de um prisma reto de altura 10 cm e cuja base é um triângulo retângulo de catetos 3 cm e 4 cm.
- A altura de um prisma triangular regular é 10 cm. Calcule a área lateral, a área total e o volume desse prisma sabendo-se que a aresta da base mede 6 cm.
- Num prisma regular hexagonal, a altura é igual a $8\sqrt{3}$ cm e a aresta da base mede 8 cm. Determine a área da base, a área lateral, a área total e o volume desse prisma.
- Calcule a área total e o volume de um prisma triangular regular cuja base tem perímetro igual a 30 cm e cuja altura é igual à aresta da base.
- A base de um prisma reto é um triângulo retângulo de hipotenusa 13 cm e um dos catetos igual a 12 cm. Calcule a área total e o volume desse prisma cuja altura é igual a 10 cm.

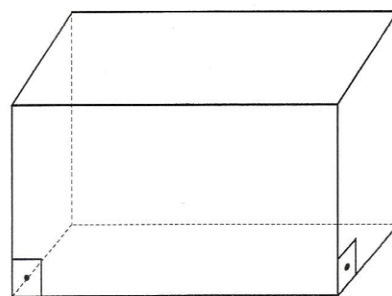
12. Num prisma hexagonal regular de altura $10\sqrt{3}$ cm, a área lateral é o dobro da área da base. Determine a área total e o volume desse prisma.

Casos particulares de prismas quadrangulares

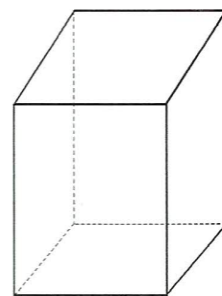
Paralelepípedo é um prisma quadrangular cujas bases são paralelogramos.



paralelepípedo oblíquo



paralelepípedo reto-retângulo



cubo

Cubo

O cubo é um paralelepípedo retângulo cujas seis faces são quadrados equivalentes. Assim, suas 12 aresta são congruentes entre si.

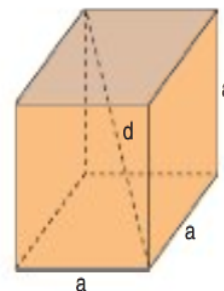
Como já sabemos, as fórmulas da área total, da diagonal e do volume de um paralelepípedo retângulo são $A = 2ab + 2ac + 2bc$, $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ e $V = a \cdot b \cdot c$, respectivamente.

Fazendo $b = c = a$, em cada uma dessas fórmulas obtêm-se as fórmulas da área total, da diagonal e do volume de um cubo de aresta de medida a :

■ Área A : $A = 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a \Rightarrow A = 6a^2$

■ Diagonal d : $d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{3}$

■ Volume V : $V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow V = a^3$



Observação

O SI (Sistema Internacional de medidas) inclui o litro, além do metro cúbico, como unidade de volume. A unidade litro é definida como o volume de um cubo cuja aresta mede 1 decímetro, ou seja, $1 \text{ L} = 1 \ell = 1 \text{ dm}^3$.

determinamos o volume da carroceria de caminhão de Onofre: 108 m^3 .

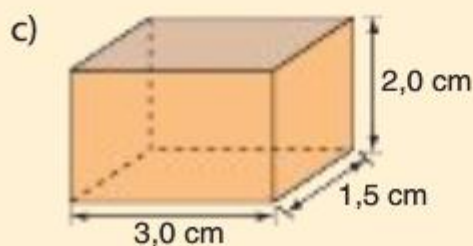
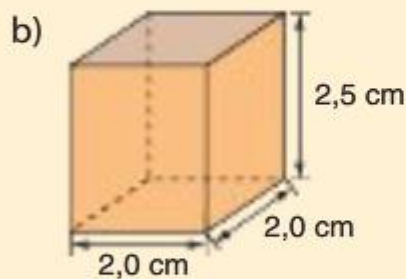
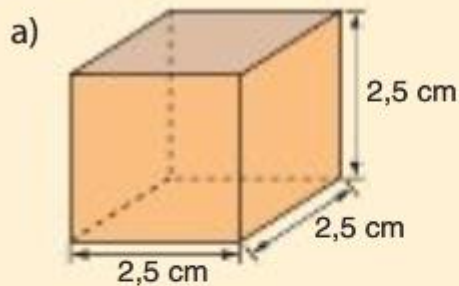
Agora, vamos determinar o maior número de caixas que podem ser transportadas na carroceria de seu caminhão, considerando que todas têm a forma de um cubo cuja aresta mede 50 cm e que a massa total das caixas não excede a tonelage máxima que o caminhão pode transportar.

Se cada aresta da caixa mede 50 cm , o volume ocupado por uma única caixa é:

$$V_1 = 50 \cdot 50 \cdot 50 \text{ cm}^3 = 125\,000 \text{ cm}^3 = 0,125 \text{ m}^3$$

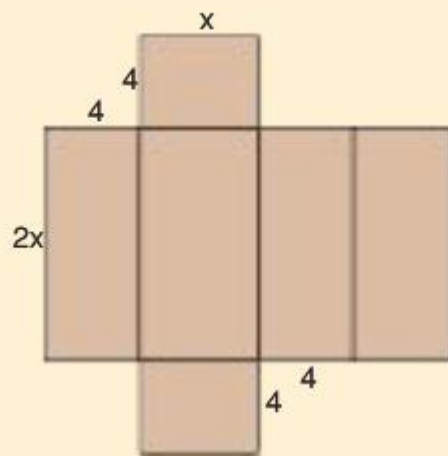
Exercícios

- 1.** Calcule a diagonal, a área total e o volume de cada um dos paralelepípedos retângulos representados abaixo:



- 2.** Determine o volume de um paralelepípedo retângulo sabendo que a medida de sua diagonal é $3\sqrt{10} \text{ dm}$ e duas de suas dimensões medem 4 dm e 7 dm .

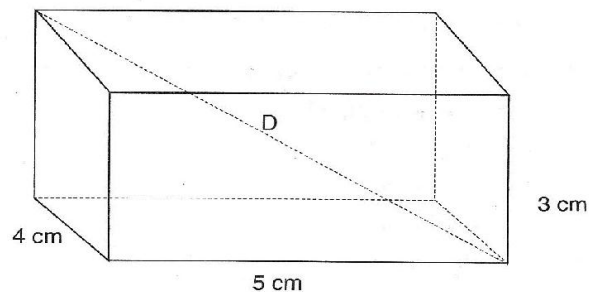
3. Calcule a diagonal, a área total e o volume de um cubo cuja soma das medidas das arestas é igual a 48 cm.
4. Calcule a área total e o volume de um cubo cuja diagonal de uma face mede 1,2 m.
5. A figura mostra a planificação de um paralelepípedo retângulo no qual a unidade das dimensões indicadas é o centímetro. Determine:



- a) x , sabendo que a área total do paralelepípedo é igual a 364 cm^2 .
- b) o volume do paralelepípedo para $x = 4 \text{ cm}$.
- c) a medida da diagonal do paralelepípedo para $x = 6 \text{ cm}$.

6. Num paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 5 cm, 4 cm e 3 cm, calcule:

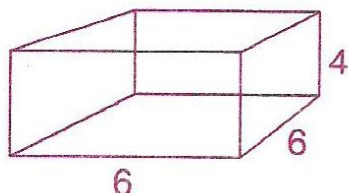
- a) a diagonal;
- b) a área total;
- c) o volume.



7. Se a área total de um cubo é 24 cm^2 , calcule:

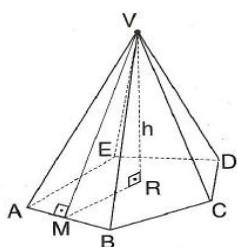
- a) a aresta;
- b) o volume.

8. Calcule a diagonal, a área total e o volume de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 8 cm, 6 cm e 4 cm.
9. A base de um paralelepípedo reto-retângulo é um quadrado de área 36 cm^2 . Calcule a diagonal, a área total e o volume desse paralelepípedo sabendo-se que sua altura é igual a 4 cm.



10. A base de um paralelepípedo reto-retângulo é um quadrado. Calcule o volume desse paralelepípedo sabendo-se que sua altura é igual a 3 cm e a sua área total é igual a 80 cm^2 .
11. Calcule a diagonal, a área total e o volume de um cubo de aresta igual a 5 cm.
12. Calcule a aresta e o volume de um cubo cuja área total é igual a 96 cm^2 .
13. Calcule a aresta e a área total de um cubo de volume 27 m^3 .

PIRÂMIDE



$\overline{VR} = h$ (altura)

$\overline{VM}$ (apótema da pirâmide)

$\overline{RM}$ (apótema da base)

Note que o apótema (VM) da pirâmide é a altura do triângulo isósceles AVB .

Área de uma pirâmide

Chamamos de **área lateral** (S_L) de uma **pirâmide** à soma das áreas das suas faces laterais.

Chamamos de **área total** (S_T) de uma **pirâmide** à soma da área lateral (S_L) com a área da base (S_B).

$$S_T = S_L + S_B$$

Volume de uma pirâmide

O **volume de uma pirâmide** é dado pela expressão:

$$V = \frac{S_B \cdot h}{3}, \text{ onde: } \begin{cases} S_B \rightarrow \text{área da base} \\ h \rightarrow \text{altura da pirâmide} \end{cases}$$

Lembre-se

O apótema de um quadrado de lado ℓ é $\frac{\ell}{2}$.

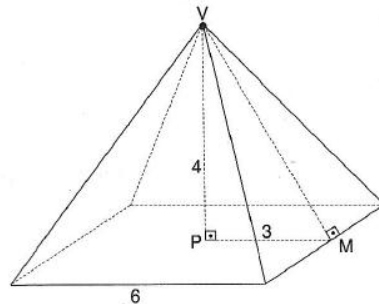
O apótema de um hexágono regular de lado ℓ é $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

O apótema de um triângulo equilátero de lado ℓ é $\frac{\ell\sqrt{3}}{6}$.

Exemplo:

Uma pirâmide quadrangular regular de altura $h = 4$ m tem uma aresta da base medindo 6 m. Calcule:

- a) o seu volume;
b) o seu apótema;
c) a sua área total.



$$a) \quad V = \frac{S_B \cdot h}{3}$$

$$\text{Sendo: } \begin{cases} S_B = 6 \cdot 6 = 36 \text{ m}^2 \\ h = 4 \text{ m} \end{cases}$$

$$V = \frac{36 \cdot 4}{3} = 48 \text{ m}^3$$

- b) Apótema $VM = ?$

No $\triangle$ retângulo VPM , aplicando o teorema de Pitágoras:

$$VM^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow VM = 5 \text{ m}$$

- c) A área total (S_T) da superfície externa de uma pirâmide é a soma da área da base (S_B) com a área lateral (S_L):

$$S_L \text{ é igual a quatro vezes a área de cada triângulo: } S_L = 4 \times \frac{b \cdot h}{2}$$

$$\text{Sendo: } \begin{cases} b = 6 \text{ m} \\ h = VM = 5 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow S_L = 4 \times \frac{6 \cdot 5}{2} = 60 \text{ m}^2$$

A área total (S_T)

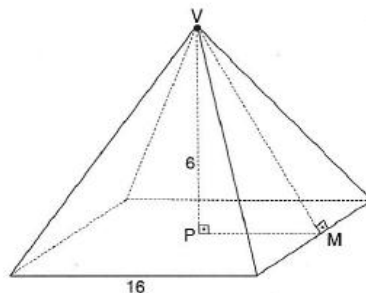
$$S_T = S_B + S_L$$

$$S_B = 6 \cdot 6 = 36 \text{ m}^2$$

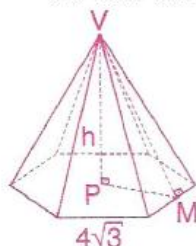
$$S_T = 36 \text{ m}^2 + 60 \text{ m}^2 = 96 \text{ m}^2$$

EXERCÍCIOS

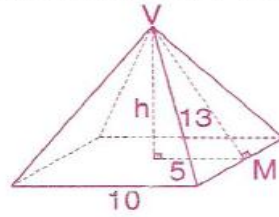
- 14 Numa pirâmide quadrangular regular, a aresta da base mede 16 cm. Calcule a área total e o volume dessa pirâmide sabendo-se que ela tem uma altura de 6 cm.



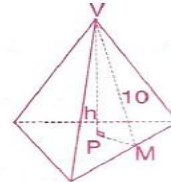
15. A aresta da base de uma pirâmide hexagonal regular mede $4\sqrt{3}$ cm. Calcule a área total e o volume dessa pirâmide sabendo-se que ela tem uma altura de 8 cm.



16. O apótema da base e o apótema de uma pirâmide quadrangular regular medem, respectivamente, 5 cm e 13 cm. Calcule a área total e o volume dessa pirâmide.

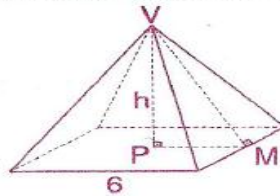


17. O apótema e a aresta da base de uma pirâmide triangular regular medem, respectivamente, 10 cm e $12\sqrt{3}$ cm. Calcule a área total e o volume dessa pirâmide.

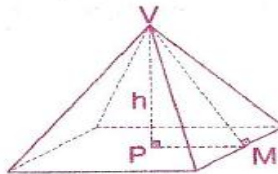


18. Calcule o volume de uma pirâmide triangular regular que tem uma aresta da base igual a 6 cm e altura 8 cm.

19. A área lateral de uma pirâmide quadrangular regular mede 60 cm^2 . Determine o volume dessa pirâmide sabendo-se que a aresta da base mede 6 cm.



20. Uma pirâmide quadrangular regular de volume igual a 128 cm^3 tem uma altura igual a 6 cm. Determine a medida da aresta da base e do apótema da pirâmide.



CILINDRO CIRCULAR

Área total de um cilindro reto

A área total (S_T) da superfície externa de um cilindro reto é a soma das áreas das bases com a área lateral:



$$S_T = 2 S_B + S_L, \text{ onde: } \begin{cases} S_B \rightarrow \text{área da base} \\ S_L \rightarrow \text{área lateral} \end{cases}$$

Seja o cilindro reto de altura h , com bases de raio r :
 $S_B = \pi r^2$ {área do círculo de raio r .

$$S_L = 2\pi r h \left\{ \begin{array}{l} \text{área de um retângulo de dimensões } 2\pi r, \text{ que é o} \\ \text{comprimento da circunferência, e } h \end{array} \right.$$

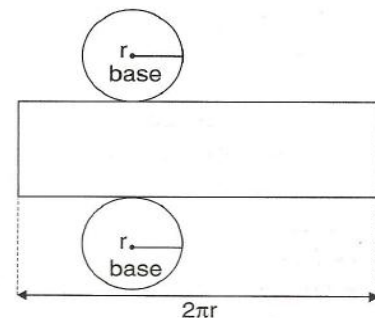
Assim:

$$S_T = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad \text{ou} \quad S_T = 2\pi r (r + h)$$

Volume de um cilindro

O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base (S_B) pela altura (h).

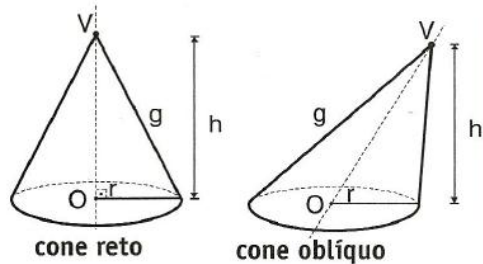
Sendo $S_B = \pi r^2$, então: $V = \pi r^2 h$



CONE CIRCULAR

Cone reto e cone obluo

Quando o eixo  perpendicular ao plano da base, o cone  **reto**; quando não, o cone  **obluo**.



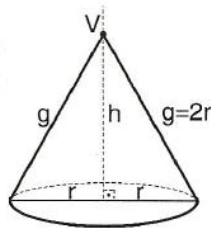
Nota

Num cone reto, as geratrizes são todas congruentes entre si, e sendo **g** a geratriz, **h** a altura e **r** o raio da base, aplicando a relação de Pitágoras, temos:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

Cone equilátero

Um cone reto  **equilátero** quando a geratriz  igual ao dobro do raio da base.



Aplicando a relação de Pitágoras:

$$(2r)^2 = h^2 + r^2$$

$$4r^2 - r^2 = h^2 \Rightarrow h^2 = 3r^2$$

$$h = r\sqrt{3}$$

rea de um cone

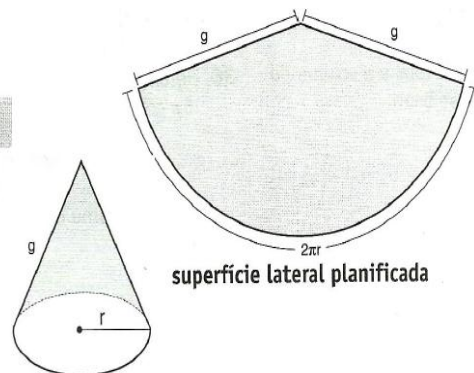
A rea lateral de um cone  obtida por meio da expresso:

$$S_L = \pi r g$$

A rea total de um cone  a soma da área da base com a área lateral.

$$S_T = S_B + S_L$$

$$S_T = \pi r^2 + \pi r g \Rightarrow S_T = \pi r (r + g)$$



Volume de um cone

O volume de um cone  dado pela expresso:

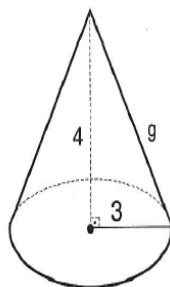
$$V = \frac{S_B \cdot h}{3}$$

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

$$\text{onde } \begin{cases} S_B = \pi r^2 \rightarrow \text{área da base} \\ h \rightarrow \text{altura} \end{cases}$$

Exemplos:

1. Calcule a área da base, a área lateral, a área total e o volume de um cone reto, de altura igual a 4 cm e raio da base igual a 3 cm.



$$g^2 = h^2 + r^2$$

$$g^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow g = 5 \text{ cm}$$

rea da base:

$$S_B = \pi r^2 \Rightarrow S_B = \pi 3^2 \Rightarrow S_B = 9\pi \text{ cm}^2$$

rea lateral:

$$S_L = \pi r g \Rightarrow S_L = \pi \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow S_L = 15\pi \text{ cm}^2$$

rea da total:

$$S_T = S_B + S_L \Rightarrow S_T = 9\pi + 15\pi \Rightarrow S_T = 24\pi \text{ cm}^2$$

Volume:

$$V = \frac{S_B \cdot h}{3} \Rightarrow V = \frac{9\pi \cdot 4}{3} \Rightarrow V = 12\pi \text{ cm}^3$$

2. Qual é o volume de um cone equilátero cujo raio da base é igual a 6 m?

$$\text{cone equilátero} \Rightarrow g = 2r \quad h^2 + r^2 = g^2 \Rightarrow h^2 + r^2 = (2r)^2$$

$$h^2 = 3r^2 \Rightarrow h = r\sqrt{3} = 6 \cdot \sqrt{3} \text{ m}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V = 72\sqrt{3} \pi \text{ m}^3$$

ESFERA

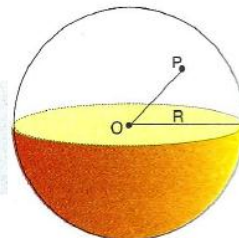
Volume de uma esfera

O volume de uma esfera pode ser obtido a partir da expressão:

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$$

Nota

Chamamos de **superfície esférica** o conjunto dos pontos P do espaço, tais que $OP = R$.



Área da superfície esférica

A área da superfície esférica pode ser obtida a partir da expressão:

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$$

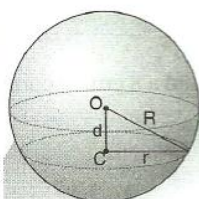
Área da superfície esférica

A área da superfície esférica pode ser obtida a partir da expressão:

$$S = 4 \pi R^2$$

Secção de uma esfera

A intersecção de uma esfera e um plano é um círculo.



O $\rightarrow$ centro da esfera

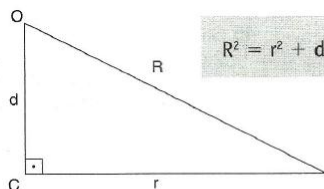
R $\rightarrow$ raio da esfera

r $\rightarrow$ raio do círculo

d $\rightarrow$ distância do círculo ao centro da esfera

C $\rightarrow$ centro do círculo

A relação entre R, r e d é dada pelo teorema de Pitágoras.



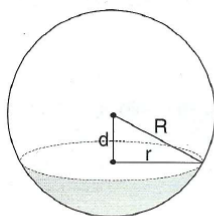
$$R^2 = r^2 + d^2$$

Nota

Quando o plano passa pelo centro da esfera, a secção é um círculo de raio igual ao raio da esfera. Dizemos então que a secção é um círculo máximo da esfera.

Exemplos:

1. Uma secção plana feita a 3 cm do centro de uma esfera tem área igual a $16\pi \text{ cm}^2$. Calcule o volume da esfera e a área da superfície esférica.



$$S_{\text{círculo}} = \pi r^2 \Rightarrow 16\pi = \pi r^2 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} d = 3 \text{ cm} \\ r = 4 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} R^2 = r^2 + d^2 \\ R^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow R = 5 \text{ cm} \end{array}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 \Rightarrow V = \frac{500}{3} \pi \text{ cm}^3$$

$$S = 4\pi R^2 \Rightarrow S = 4 \cdot \pi \cdot 5^2 \Rightarrow S = 100\pi \text{ cm}^2$$

2. Calcule o volume e a superfície de uma esfera cujo círculo máximo tem área igual a $100\pi \text{ cm}^2$.

$$S_{\text{círculo}} = \pi r^2 \Rightarrow 100\pi = \pi r^2 \Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow r = 10 \text{ cm}$$

O raio do círculo máximo é igual ao raio da esfera ($r = R$).

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 \Rightarrow V = \frac{4000}{3} \pi \text{ cm}^3$$

$$S = 4\pi R^2 \Rightarrow S = 4 \cdot \pi \cdot 10^2 \Rightarrow S = 400\pi \text{ cm}^2$$