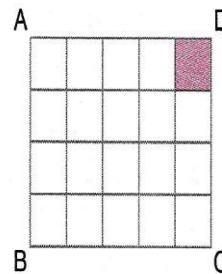
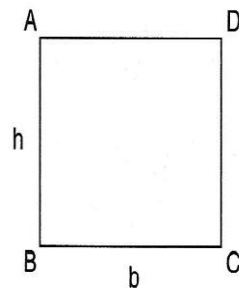




Obs: PERIMETRO: é soma da medida dos lados de um polígono.

Área do retângulo

A figura à esquerda representa o retângulo ABCD. Supondo que o lado $\overline{AB}$ mede 4 u.c. e o lado $\overline{BC}$ mede 5 u.c. — em que u.c. é a unidade de comprimento —, podemos dividir o retângulo em 20 pequenos quadrados, cada um dos quais com 1 unidade de área, conforme figura à direita.



1 unidade de área de superfície (1 u.s.)

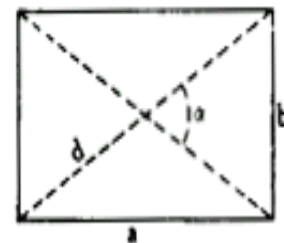
Assim, se no retângulo ABCD chamamos:

- A : área da superfície de ABCD;
- b : medida da base $\overline{BC}$;
- h : medida da altura $\overline{AB}$;

ou seja:

$$A = b \cdot h$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$S = ab$$

$$= \frac{d^2}{2} \sen \alpha$$

A área de um retângulo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura.

Exercícios resolvidos

1. Um artesão pretende usar retalhos para fazer uma colcha de formato retangular com as seguintes dimensões: 2,40 m de comprimento por 1,80 m de largura. Se os retalhos forem recortados em pedaços quadrados, cada qual com 20 cm de lado, quantos pedaços serão necessários para compor tal colcha?

Solução:

- Determinemos a área A_1 da superfície da colcha:

Como $b = 2,40$ m e $h = 1,80$ m, então $A_1 = b \cdot h = (2,40 \text{ m}) \cdot (1,80 \text{ m}) = 4,32 \text{ m}^2$

- Seja n o total de pedaços de retalho que deverão compor a colcha.

Como cada pedaço deverá ter a forma de um quadrado de 20 cm de lado, então a área A_2 de sua superfície é dada por $A_2 = \ell^2 = (20 \text{ cm}) \cdot (20 \text{ cm}) = (0,2 \text{ m}) \cdot (0,2 \text{ m}) = 0,04 \text{ m}^2$.

Assim, a área da superfície dos n pedaços reunidos — que deverão revestir os $4,32 \text{ m}^2$ — será igual a $n \cdot A_2 = n \cdot 0,04 \text{ m}^2$.

Logo, como devemos ter $n \cdot A_2 = A_1$, então $n \cdot 0,04 = 4,32$, ou seja, $n = 108$ pedaços.

2. No interior de um parque P , cuja forma é a de um retângulo com superfície de $240\,000 \text{ m}^2$ de área, há uma área de lazer L , de formato quadrado. Sabendo que a medida do lado de L corresponde a 6% da medida do comprimento de P e a 9% da medida da largura de P , determine a área da superfície L .

Solução:

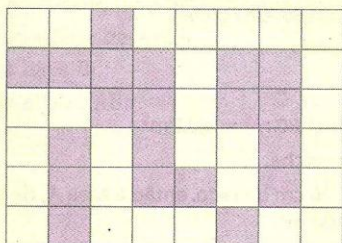
Indicando-se por b a medida do comprimento de P , h a medida da largura de P e ℓ a medida do lado de L , temos:

Exercícios

- Determine a área de:
 - um retângulo cujas dimensões são 6,5 cm e 12 cm.
 - um quadrado cujo lado mede $5\sqrt{3}$ m.
 - um retângulo cuja base mede 16 dm e cuja diagonal mede 20 dm.
 - um quadrado que tem 24 m de perímetro.
 - um retângulo cuja diagonal forma um ângulo de 30° com o lado que tem 12 dm de comprimento.
 - um quadrado cuja diagonal mede $5\sqrt{2}$ mm.

- Um mapa de certa região foi construído de tal maneira que 0,1 km corresponde, na escala do mapa, a 0,5 cm. Determine, em metros quadrados, a área real de uma chácara que, nesse mapa, é representada por um quadrado cujo lado mede 0,3 cm.

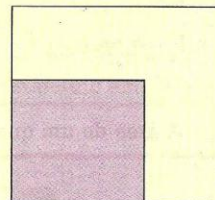
- A figura apresenta uma malha quadriculada em que a medida do lado de cada quadradinho é 2,5 u.c. (unidades de comprimento). Determine a área da região colorida.



- (PUC-MG) Certa peça de bijuteria é uma placa quadrada de metal com diagonal medindo, aproximadamente, $3\sqrt{3}$ cm. Se esse metal é comercializado por R\$ 2,00 o centímetro quadrado, qual o custo do material usado na confecção dessa peça?

- Um retângulo tem 28 cm de perímetro, e suas dimensões estão entre si na razão $\frac{3}{4}$. Determine sua área.

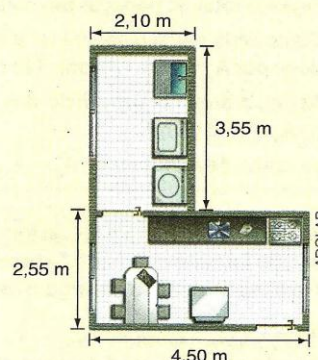
- Na figura, a região colorida representa uma piscina de formato quadrado, construída no quintal de uma casa. Pretende-se reduzir 2 m das dimensões da superfície dessa piscina, de modo que ela passe a ocupar 36% da área do quintal. Se o quintal tem a forma de um quadrado cuja área é 225 m^2 , determine quantos metros quadrados aumentará a superfície do quintal não ocupada pela piscina.



- Determine as dimensões de um retângulo, sabendo que ele tem 22 dm de perímetro e sua área é igual a 30 dm^2 .

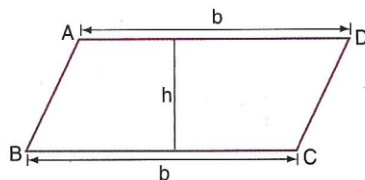
- A figura abaixo mostra a planta baixa da cozinha e da área de serviço de um apartamento.

Considerando desprezível a espessura das paredes, determine a área total da superfície das dependências mostradas.



Área do paralelogramo

Determinemos a área do paralelogramo ABCD, representado na figura abaixo, em que b e h são as medidas da base e da altura, respectivamente.



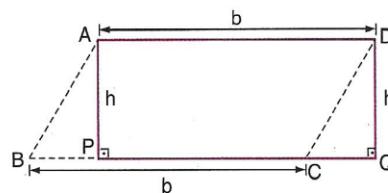
Observe que, projetando-se os vértices A e D sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$, obtêm-se os pontos P e Q , respectivamente, ficando assim determinado o retângulo APQD, como mostrado na figura ao lado.

Note que os triângulos APB e DQC são congruentes e, portanto, têm áreas iguais.

Assim, a área do paralelogramo ABCD é igual à área do retângulo APQD, ou seja:

$$A = b \cdot h$$

A área de um paralelogramo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura.



Exemplo 2

Vamos determinar a área do paralelogramo ABCD, representado na figura, considerando que a unidade das medidas indicadas é o centímetro.

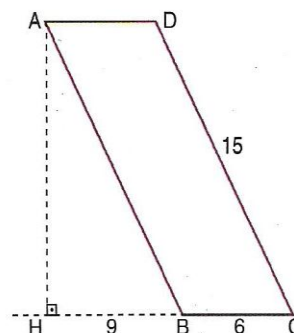
Note que a altura do paralelogramo é a perpendicular $\overline{AH}$, traçada pelo vértice A à reta suporte do lado $\overline{BC}$.

Como o triângulo AHB é retângulo, então, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$AH^2 + HB^2 = AB^2 \Rightarrow AH^2 = 15^2 - 9^2 = 144 \Rightarrow AH = 12 \text{ cm}$$

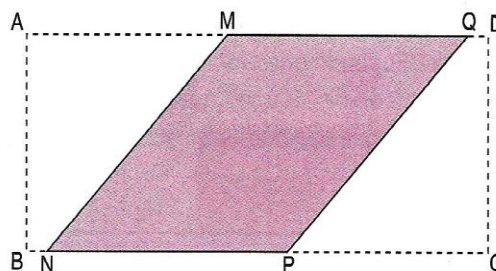
Logo, a área de ABCD é:

$$A = BC \cdot AH = (6 \text{ cm}) \cdot (12 \text{ cm}) = 72 \text{ cm}^2$$



Exercício resolvido

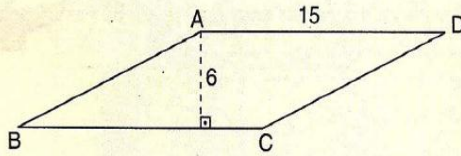
3. Originalmente o palco de um teatro tinha a forma de um retângulo ABCD, de dimensões 34 m e 12 m. Após uma reforma o palco passou a ter a forma do paralelogramo MNPQ, no qual dois lados consecutivos formam entre si um ângulo de 45° , conforme mostrado na figura. Se $BN = QD = 2$ m, quanto foi reduzido da área da superfície do palco original?



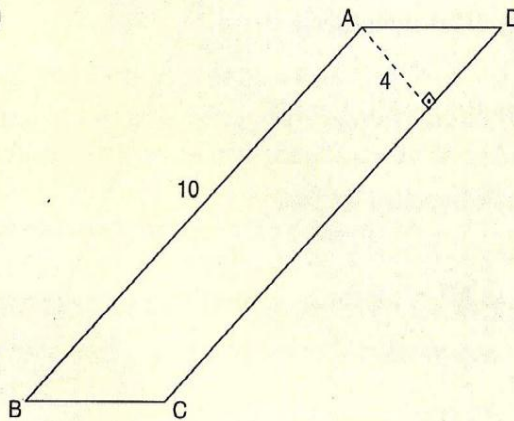
Exercícios

11. Em cada caso, determine a área do paralelogramo ABCD, considerando que a unidade das medidas indicadas é o centímetro.

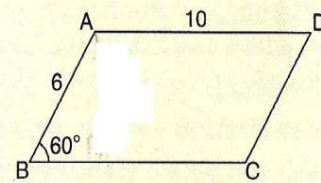
a)



b)

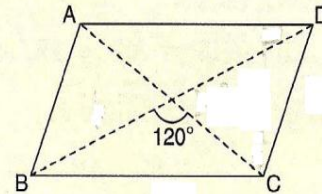


c)



12. A superfície plana de um jardim, no formato de um paralelogramo cujos lados medem 8 m, formam entre si um ângulo de 60° , de grama. Qual é a área desse jardim?

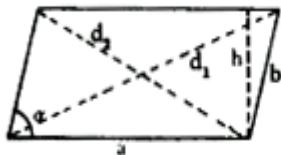
13. Calcule o perímetro e a área de um paralelogramo sabendo que suas diagonais medem 6 cm e 8 cm, e que um dos ângulos que elas formam mede 120° .



hábio

PARALELOGRAMO

$$d_1 = \sqrt{(a + h \cot \alpha)^2 + h^2}$$



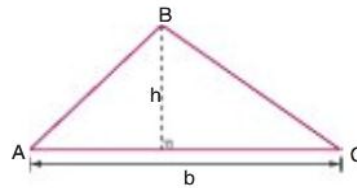
$$S = ah$$

$$= ab \sin \alpha$$

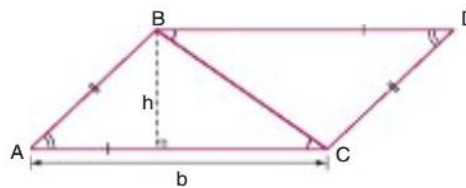
$$d_2 = \sqrt{(a - h \cot \alpha)^2 + h^2}$$

Área do triângulo

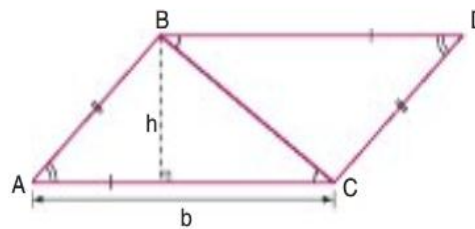
Seja o triângulo ABC , cuja base $\overline{AC}$ mede b e a altura relativa a essa base mede h , representado na figura abaixo.



Note que as respectivas paralelas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, traçadas pelos vértices B e C , interceptam-se no ponto D , determinando assim o paralelogramo $ABCD$, cujas medidas da base e da altura são b e h , conforme mostrado na figura abaixo.



Note que as respectivas paralelas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, traçadas pelos vértices B e C , interceptam-se no ponto D , determinando assim o paralelogramo $ABCD$, cujas medidas da base e da altura são b e h , conforme mostrado na figura abaixo.



Como $AB = DC$, $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BDC})$ e $AC = DB$, os triângulos ABC e DCB são congruentes e, portanto, suas áreas são iguais.

Logo, a área do triângulo ABC é igual à metade da área do paralelogramo $ABCD$, ou seja:

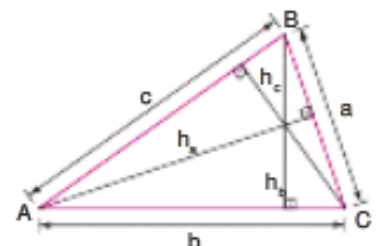
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

A área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura.

Observação

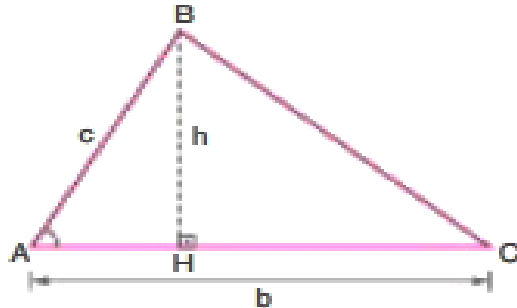
De modo geral, se h_a , h_b e h_c são as respectivas medidas das alturas relativas aos lados de medidas a , b e c , temos:

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2} \text{ ou } A = \frac{b \cdot h_b}{2} \text{ ou } A = \frac{c \cdot h_c}{2}$$



Expressões da área de um triângulo

Em função das medidas de dois lados e do seno do ângulo compreendido entre eles



$$\text{sen } \hat{A} = \frac{h}{c}$$

$$h = c \cdot \text{sen } \hat{A}$$

Como a área do triângulo ABC é dada por $A = \frac{b \cdot h}{2}$, então:

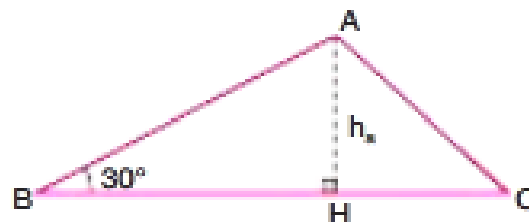
$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A}$$

Da mesma forma, obtêm-se: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B}$ e $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen } \hat{C}$.

3

Exemplo

Dado um triângulo ABC, em que $AB = 12$ cm, $BC = 18$ cm e $m(\hat{ABC}) = 30^\circ$, vamos determinar a sua área de duas maneiras:



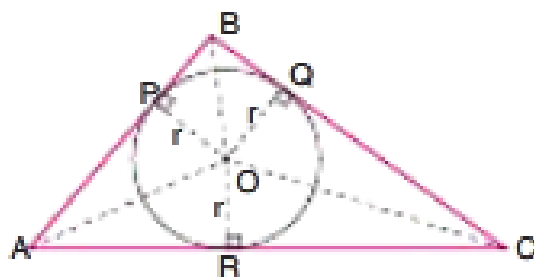
1ª maneira

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{h_a}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h_a}{12} \Rightarrow h_a = 6 \text{ cm}$$

2ª maneira

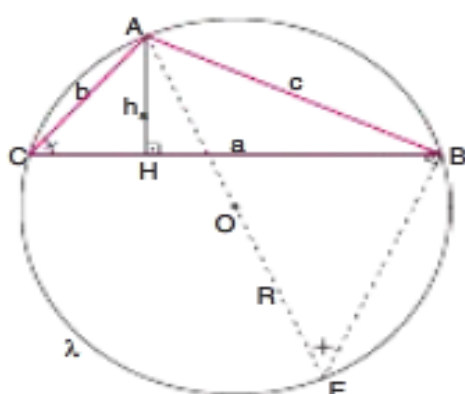
$$A = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AB \cdot \text{sen } 30^\circ \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow A = 54 \text{ cm}^2$$

Em função das medidas de seus lados e da medida do raio da circunferência inscrita



$$A = p \cdot r$$

Em função das medidas dos lados e da medida do raio da circunferência circunscrita



$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

4

Exemplo

Na figura, temos o triângulo ABC, inscrito em uma circunferência de centro O e raio de medida R. Sabendo que a medida do ângulo central AOC é 120° e os lados AB, BC e CA medem $c = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ cm, $a = 4\sqrt{2}$ cm e $b = 4\sqrt{3}$ cm, respectivamente, vamos calcular a área do triângulo ABC.

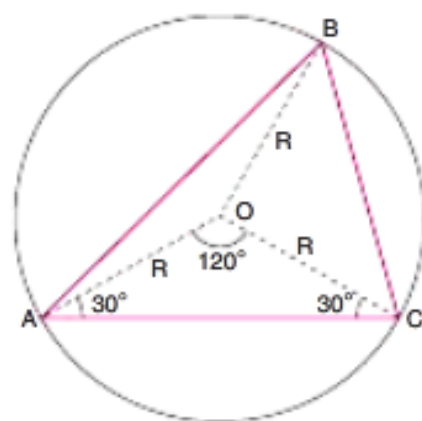
Aplicando a lei dos senos no $\triangle AOC$, temos:

$$\frac{R}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 120^\circ} \Rightarrow \frac{R}{\frac{1}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow R = 4 \text{ cm}$$

Como a área do triângulo pode ser calculada pela expressão

$A = \frac{abc}{4R}$, vem:

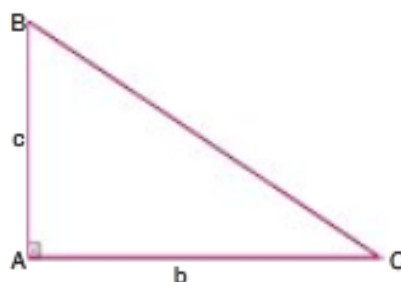
$$A = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4 \cdot 4} = 2\sqrt{6}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \Rightarrow A = 4(3 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$$



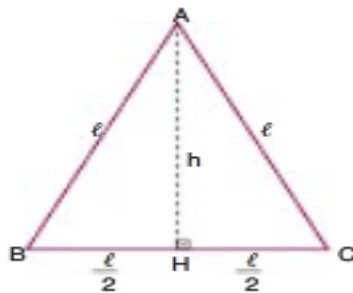
Casos particulares

Área do triângulo retângulo

$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$



Área do triângulo equilátero



$$A = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Exercício resolvido

4. Determinar a área do quadrilátero ABCD representado na figura, sabendo que: $AB = 6$ cm; $AD = 10$ cm; a diagonal AC determina com os lados AD e CD ângulos de 60° ; o lado BC é perpendicular ao lado AB.

Solução:

A área A do quadrilátero ABCD é tal que $A = A_1 + A_2$, em que A_1 e A_2 são as áreas dos triângulos ACD e ABC, respectivamente.

■ Cálculo de A_1 :

Como $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{DAC}) = 60^\circ$, então $m(\widehat{ADC}) = 60^\circ$, ou seja, o $\triangle ACD$ é equilátero e sua área é dada por:

$$A_1 = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_1 = \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_1 = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

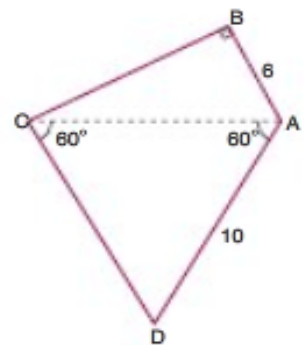
■ Cálculo de A_2 :

Como o $\triangle ABC$ é retângulo em B, então, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 \Rightarrow 10^2 = BC^2 + 6^2 \Rightarrow BC = 8 \text{ cm}$$

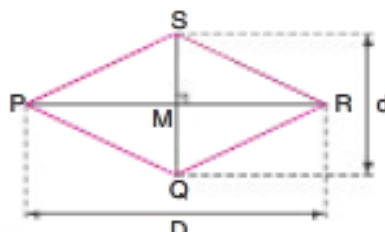
$$\text{Assim, } A_2 = \frac{1}{2} (BC) \cdot (AB) \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \Rightarrow A_2 = 24 \text{ cm}^2$$

Logo, a área do quadrilátero ABCD é: $A = A_1 + A_2 = (25\sqrt{3} + 24) \text{ cm}^2$.



Área do losango

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$



A área de um losango é igual à metade do produto das medidas das diagonais.

Observe no seu livro outros exemplos sobre Losango. Pagina 146 e 147

Área do trapézio

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

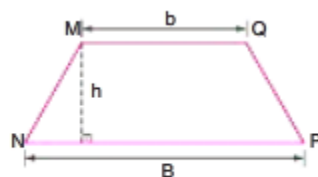


Figura 1

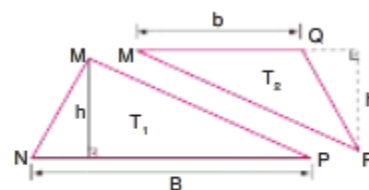


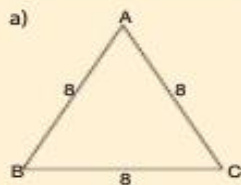
Figura 2

A área de um trapézio é igual à metade do produto da soma das medidas das bases pela medida da altura.

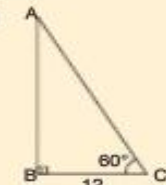
Exercícios

14. Determine a área de cada um dos triângulos representados nas figuras seguintes, nas quais a unidade das medidas indicadas é o metro.

a)



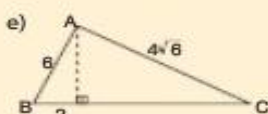
d)



b)



e)



c)



15. Calcule a área do triângulo em cada um dos seguintes casos:

- A medida de um lado é 12 cm, e a altura relativa a esse lado mede 8 cm.
- As medidas dos lados são 8 m, 10 m e 14 m.
- O triângulo é equilátero, e os lados medem 6 dm.
- O triângulo é isósceles, os lados congruentes medem 12 m, e o outro lado mede 6 m.
- O triângulo é retângulo, e os catetos medem 3,6 cm e 4,8 cm.

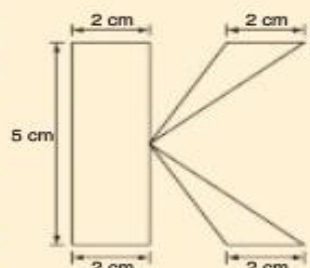
- O triângulo é retângulo, com um dos catetos e a hipotenusa medindo 12 dm e 18 dm, respectivamente.
- Dois lados, que medem 14 m e 18 m, determinam entre si um ângulo que mede 120°.

16. A superfície da mesa mostrada na figura é um quadrado, composto de quatro triângulos isósceles congruentes cujos lados congruentes medem $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ m.



Determine a área da superfície dessa mesa.

17. Kátia levou 20 peças de seu enxoval a uma costureira, para que ela confeccionasse e aplicasse, em cada peça, o monograma mostrado na figura ao lado.

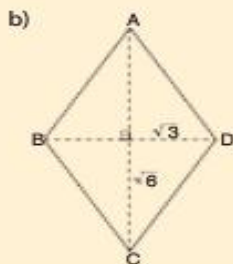
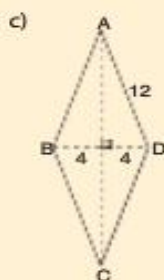
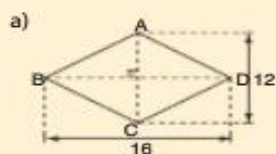


Considerando que para fazer esse monograma a costureira cobra pelo tecido usado, ao custo de R\$ 120,00 o

metro quadrado, e pela sua mão de obra R\$ 7,50 por monograma confeccionado e aplicado, determine a quantia que Kátia deverá desembolsar pelo serviço contratado.

18. Um triângulo equilátero ABC tem 8 cm de lado. Se a medida de cada lado desse triângulo for acrescida de seus 25%, que porcentagem de acréscimo sofrerá a área de ABC?

19. Em cada caso, determine a área do losango ABCD, considerando o decímetro como a unidade das medidas indicadas.

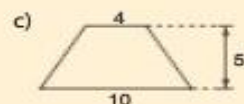
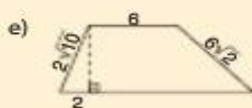
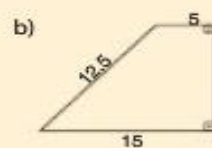
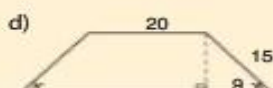
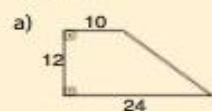


20. Determine a área do losango sob as seguintes condições:

- A medida do lado é 8 cm, e uma das diagonais mede 12 cm.
- A diagonal maior mede 16 dm e tem 40 dm de perímetro.
- O perímetro é 60 cm, e dois lados formam entre si um ângulo de 120° .
- As diagonais estão entre si na razão $\frac{3}{4}$, e o perímetro é 50 m.
- A soma e o produto das medidas das diagonais são, respectivamente, 126 cm e 3 888 cm^2 .

21. Em um mapa, feito em uma escala de 90 km por 1 cm, certo município aparece representado por um losango cujo lado mede 1,25 cm. Sabendo que as medidas das diagonais estão entre si assim como 3 está para 4, determine a área real desse município, em quilômetros quadrados.

22. Determine a área de cada um dos trapézios seguintes, nos quais a unidade das medidas indicadas é o metro.



23. Sabe-se que os lotes de um condomínio fechado são vendidos ao preço de R\$ 350,00 o metro quadrado. Nessas condições, por quanto deverá ser vendido o lote representado na figura ao lado, sabendo que tem a forma de um trapézio retângulo com as dimensões indicadas?



24. Para a realização de um espetáculo ao ar livre, foi montado um palco cuja superfície tem a forma de um trapézio isósceles de 78 m de perímetro, com bases que medem 15 m e 33 m. Qual é a área da superfície desse palco?



VISIONS OF AMERICA, LLC/ALAMY
OTHER IMAGES

25. Considere um trapézio cuja altura mede 4 dm e no qual a medida da base maior excede a medida da base menor em 3 dm. Se a área desse trapézio é igual a 24 dm^2 , determine as medidas de suas bases.
26. Um trapézio isósceles é tal que a base menor mede 6 cm, um dos ângulos internos mede 120° , e a medida da altura é 3 cm. Nessas condições, determine o perímetro e a área desse trapézio.