Nível: **Ensino Médio**	Área de conhecimento: **Matemática**	Turma:	
Disciplina: **BOATEMÁTICA**		3º Bimestre	
Data: ____/____/_____	**GEOMETRIA ESPACIAL**		
Professor: **Marcus Sales**			
Aluno (a):			

1. Determine o número de vértices de um poliedro convexo que possui 5 faces e 12 arestas.

2. Quantas faces possui um poliedro convexo de 10 vértices e 14 arestas?

3. Determine o número de arestas de um poliedro convexo de 8 vértices e 8 faces.

4. Determine o número de faces de um poliedro convexo, sabendo-se que o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades.

5. Um poliedro convexo possui 6 faces triangulares e 3 faces quadrangulares. Determine o número de arestas e de vértices desse poliedro.

6. Um poliedro convexo possui 5 faces triangulares, 4 faces quadrangulares e 3 faces pentagonais. Quantos vértices possui esse poliedro?

7. Determine a área da base, a área lateral, a área total e o volume de um prisma reto de altura 10 cm e cuja base é um triângulo retângulo de catetos 3 cm e 4 cm.

8. A altura de um prisma triangular regular é 10 cm. Calcule a área lateral, a área total e o volume desse prisma sabendo-se que a aresta da base mede 6 cm.

9. Num prisma regular hexagonal, a altura é igual a $8\sqrt{3}$ cm e a aresta da base mede 8 cm. Determine a área da base, a área lateral, a área total e o volume desse prisma.

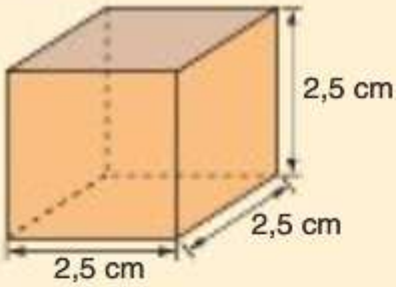
10. Calcule a área total e o volume de um prisma triangular regular cuja base tem perímetro igual a 30 cm e cuja altura é igual à aresta da base.

11. A base de um prisma reto é um triângulo retângulo de hipotenusa 13 cm e um dos catetos igual a 12 cm. Calcule a área total e o volume desse prisma cuja altura é igual a 10 cm.

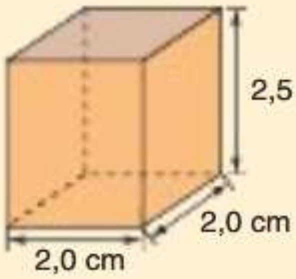
Exercícios

1. Calcule a diagonal, a área total e o volume de cada um dos paralelepípedos retângulos representados abaixo:

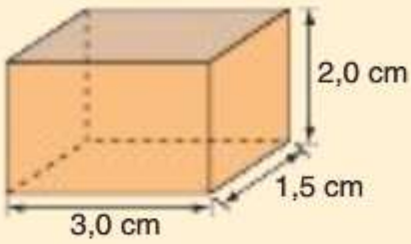
a)



b)



c)

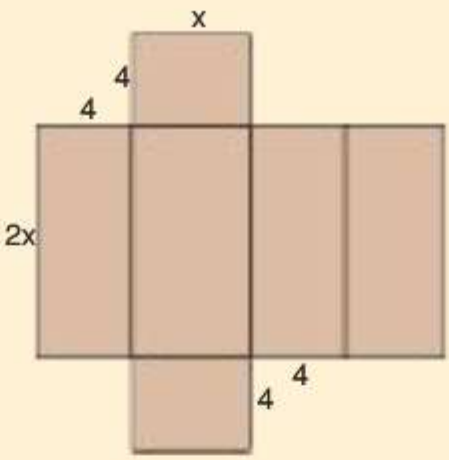


2. Determine o volume de um paralelepípedo retângulo sabendo que a medida de sua diagonal é $3\sqrt{10}$ dm e duas de suas dimensões medem 4 dm e 7 dm.

3. Calcule a diagonal, a área total e o volume de um cubo cuja soma das medidas das arestas é igual a 48 cm.

4. Calcule a área total e o volume de um cubo cuja diagonal de uma face mede 1,2 m.

5. A figura mostra a planificação de um paralelepípedo retângulo no qual a unidade das dimensões indicadas é o centímetro. Determine:



a) x, sabendo que a área total do paralelepípedo é igual a 364 cm².

b) o volume do paralelepípedo para $x = 4$ cm.

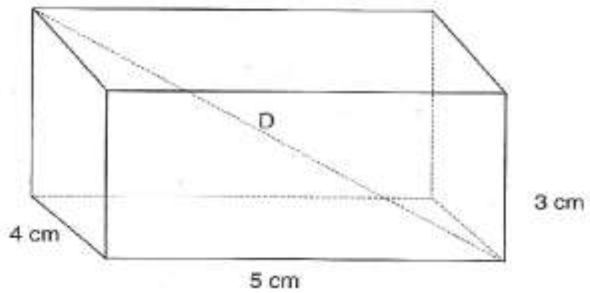
c) a medida da diagonal do paralelepípedo para $x = 6$ cm.

6. Num paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 5 cm, 4 cm e 3 cm, calcule:

a) a diagonal;

b) a área total;

c) o volume.



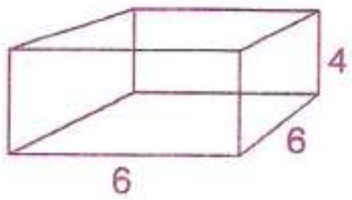
7. Se a área total de um cubo é 24 cm², calcule:

a) a aresta;

b) o volume.

8. Calcule a diagonal, a área total e o volume de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 8 cm, 6 cm e 4 cm.

9. A base de um paralelepípedo reto-retângulo é um quadrado de área 36 cm². Calcule a diagonal, a área total e o volume desse paralelepípedo sabendo-se que sua altura é igual a 4 cm.



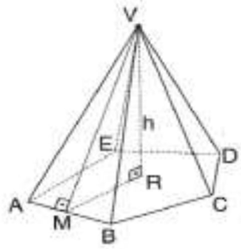
10. A base de um paralelepípedo reto-retângulo é um quadrado. Calcule o volume desse paralelepípedo sabendo-se que sua altura é igual a 3 cm e a sua área total é igual a 80 cm².

11. Calcule a diagonal, a área total e o volume de um cubo de aresta igual a 5 cm.

12 Calcule a aresta e o volume de um cubo cuja área total é igual a 96 cm².

13. Calcule a aresta e a área total de um cubo de volume 27 m³.

PIRÂMIDE



$\overline{VR} = h$ (altura)

$\overline{VM}$ (apótema da pirâmide)

$\overline{RM}$ (apótema da base)

Note que o apótema ($\overline{VM}$) da pirâmide é a altura do triângulo isósceles AVB.

Área de uma pirâmide

Chamamos de **área lateral** (S_L) **de uma pirâmide** à soma das áreas das suas faces laterais.

Chamamos de **área total** (S_T) **de uma pirâmide** à soma da área lateral (S_L) com a área da base (S_B).

$$S_T = S_L + S_B$$

Volume de uma pirâmide

O **volume de uma pirâmide** é dado pela expressão:

$$V = \frac{S_B \cdot h}{3}, \quad \text{onde: } \begin{cases} S_B \to \text{área da base} \\ h \to \text{altura da pirâmide} \end{cases}$$

Lembre-se

O apótema de um quadrado de lado ℓ é $\frac{\ell}{2}$.

O apótema de um hexágono regular de lado ℓ é $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

O apótema de um triângulo eqüilátero de lado ℓ é $\frac{\ell\sqrt{3}}{6}$

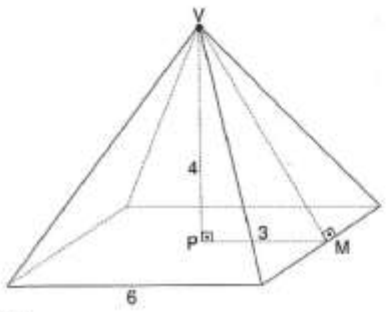
Exemplo:

Uma pirâmide quadrangular regular de altura h = 4 m tem uma aresta da base medindo 6 m. Calcule:

a) o seu volume;

b) o seu apótema;

c) a sua área total.



a) $V = \dfrac{S_B \cdot h}{3}$

Sendo: $\begin{cases} S_B = 6 \cdot 6 = 36 \text{ m}^2 \\ h = 4 \text{ m} \end{cases}$

$V = \dfrac{36 \cdot 4}{3} = 48 \text{ m}^3$

b) Apótema VM = ?
No △ retângulo VPM, aplicando o teorema de Pitágoras:
$VM^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow VM = 5$ m

c) A área total (S_T) da superfície externa de uma pirâmide é a soma da área da base (S_B) com a área lateral (S_L):

S_L é igual a quatro vezes a área de cada triângulo: $S_L = 4 \times \dfrac{b \cdot h}{2}$

Sendo: $\begin{cases} b = 6 \text{ m} \\ h = VM = 5 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow S_L = 4 \times \dfrac{6 \cdot 5}{2} = 60 \text{ m}^2$

A área total (S_T)

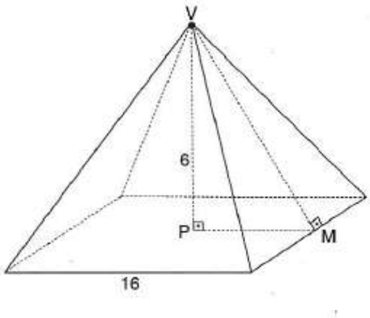
$S_T = S_B + S_L$

$S_B = 6 \cdot 6 = 36 \text{ m}^2$

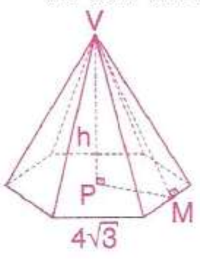
$S_T = 36 \text{ m}^2 + 60 \text{ m}^2 = 96 \text{ m}^2$

EXERCÍCIOS

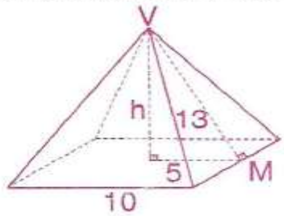
14 Numa pirâmide quadrangular regular, a aresta da base mede 16 cm. Calcule a área total e o volume dessa pirâmide sabendo-se que ela tem uma altura de 6 cm.



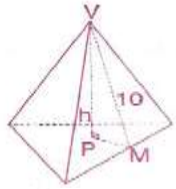
15.A aresta da base de uma pirâmide hexagonal regular mede $4\sqrt{3}$ cm. Calcule a área total e o volume dessa pirâmide sabendo-se que ela tem uma altura de 8 cm.



16. O apótema da base e o apótema de uma pirâmide quadrangular regular medem, respectivamente, 5 cm e 13 cm. Calcule a área total e o volume dessa pirâmide.

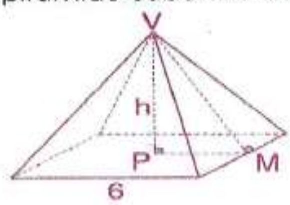


17. O apótema e a aresta da base de uma pirâmide triangular regular medem, respectivamente, 10 cm e $12\sqrt{3}$ cm. Calcule a área total e o volume dessa pirâmide.

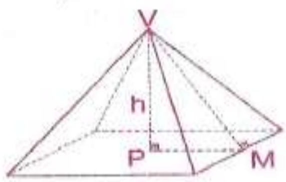


18 Calcule o volume de uma pirâmide triângular regular que tem uma aresta da base igual a 6 cm e altura 8 cm.

19 A área lateral de uma pirâmide quadrangular regular mede 60 cm². Determine o volume dessa pirâmide sabendo-se que a aresta da base mede 6 cm.



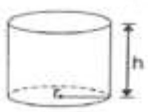
20. Uma pirâmide quadrangular regular de volume igual a 128 cm³ tem uma altura igual a 6 cm. Determine a medida da aresta da base e do apótema da pirâmide.



CILINDRO CIRCULAR

Área total de um cilindro reto

A **área total** (S_T) **da superfície externa de um cilindro reto** é a soma das áreas das bases com a área lateral:

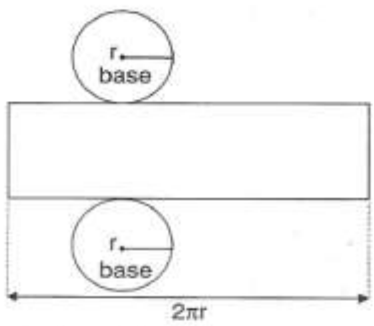


$S_T = 2S_B + S_L$, onde: $\begin{cases} S_B \rightarrow \text{área da base} \\ S_L \rightarrow \text{área lateral} \end{cases}$

Seja o cilindro reto de altura **h**, com bases de raio **r**:

$S_B = \pi r^2$ {área do círculo de raio **r**.

$S_L = 2\pi r h$ $\begin{cases} \text{área de um retângulo de dimensões } 2\pi r, \text{ que é o} \\ \text{comprimento da circunferência, e } \mathbf{h} \end{cases}$



Assim:

$S_T = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ ou $S_T = 2\pi r (r + h)$

Volume de um cilindro

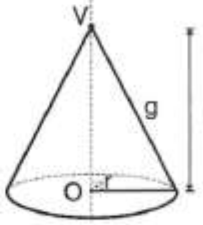
O **volume de um cilindro** é igual ao produto da área da base (S_B) pela altura (h).

Sendo $S_B = \pi r^2$, então: $V = \pi r^2 h$

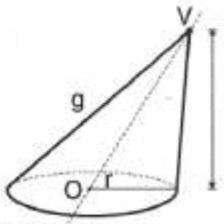
CONE CIRCULAR

Cone reto e cone oblíquo

Quando o eixo é perpendicular ao plano da base, o cone é **reto**; quando não, o cone é **oblíquo**.



cone reto



cone oblíquo

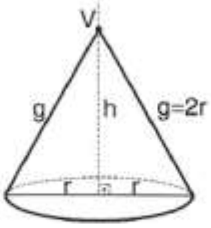
Nota

Num cone reto, as geratrizes são todas congruentes entre si, e sendo **g** a geratriz, **h** a altura e **r** o raio da base, aplicando a relação de Pitágoras, temos:

$$\boxed{g^2 = h^2 + r^2}$$

Cone eqüilátero

Um cone reto é **eqüilátero** quando a geratriz é igual ao dobro do raio da base.



Aplicando a relação de Pitágoras:

$(2r)^2 = h^2 + r^2$

$4r^2 - r^2 = h^2 \Rightarrow h^2 = 3r^2$

$$\boxed{h = r\sqrt{3}}$$

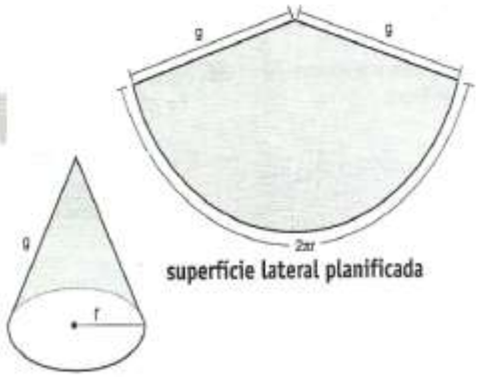
Área de um cone

A área lateral de um cone é obtida por meio da expressão: $\boxed{S_L = \pi r g}$

A área total de um cone é a soma da área da base com a área lateral.

$S_T = S_B + S_L$

$S_T = \pi r^2 + \pi r g \Rightarrow \boxed{S_T = \pi r (r + g)}$



superfície lateral planificada

Volume de um cone

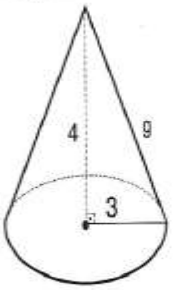
O **volume de um cone** é dado pela expressão:

$$V = \frac{S_B \cdot h}{3} \qquad \text{onde} \begin{cases} S_B = \pi r^2 \rightarrow \text{área da base} \\ h \rightarrow \text{altura} \end{cases}$$

$$\boxed{V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}}$$

Exemplos:

1. Calcule a área da base, a área lateral, a área total e o volume de um cone reto, de altura igual a 4 cm e raio da base igual a 3 cm.



$g^2 = h^2 + r^2$

$g^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow g = 5$ cm

Área da base:

$S_B = \pi r^2 \Rightarrow S_B = \pi\, 3^2 \Rightarrow S_B = 9\pi$ cm²

Área lateral:

$S_L = \pi r g \Rightarrow S_L = \pi \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow S_L = 15\pi$ cm²

Área da total:

$S_T = S_B + S_L \Rightarrow S_T = 9\pi + 15\pi \Rightarrow S_T = 24\pi$ cm²

Volume:

$$V = \frac{S_B \cdot h}{3} \Rightarrow V = \frac{9\pi \cdot 4}{3} \Rightarrow V = 12\pi \text{ cm}^3$$

2. Qual é o volume de um cone eqüilátero cujo raio da base é igual a 6 m?

cone eqüilátero $\Rightarrow g = 2r \quad h^2 + r^2 = g^2 \Rightarrow h^2 + r^2 = (2r)^2$

$$h^2 = 3r^2 \Rightarrow h = r\sqrt{3} = 6 \cdot \sqrt{3}\ \text{m}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V = 72\sqrt{3}\ \pi\ \text{m}^3$$

ESFERA

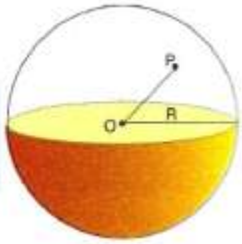
Volume de uma esfera

O **volume de uma esfera** pode ser obtido a partir da expressão:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

Nota

Chamamos de **superfície esférica** o conjunto dos pontos P do espaço, tais que OP = R.



Área da superfície esférica

A **área da superfície esférica** pode ser obtida a partir da expressão:

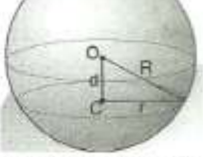
$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

Área da superfície esférica

A **área da superfície esférica** pode ser obtida a partir da expressão: $S = 4\pi R^2$

Secção de uma esfera

A intersecção de uma esfera e um plano é um círculo.



O $\rightarrow$ centro da esfera

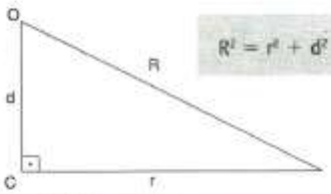
R $\rightarrow$ raio da esfera

r $\rightarrow$ raio do círculo

d $\rightarrow$ distância do círculo ao centro da esfera

C $\rightarrow$ centro do círculo

A relação entre R, **r** e **d** é dada pelo torema de Pitágoras.



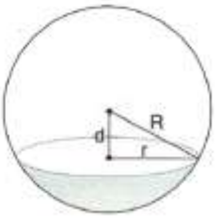
$$R^2 = r^2 + d^2$$

Nota

Quando o plano passa pelo centro da esfera, a secção é um círculo de raio igual ao raio da esfera. Dizemos então que a secção é um círculo máximo da esfera.

Exemplos:

1. Uma secção plana feita a 3 cm do centro de uma esfera tem área igual a 16π cm². Calcule o volume da esfera e a área da superfície esférica.



$$S_{círculo} = \pi r^2 \Rightarrow 16\pi = \pi r^2 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4\ \text{cm}$$

$$\left.\begin{matrix} d = 3\ \text{cm} \\ r = 4\ \text{cm} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} R^2 = r^2 + d^2 \\ R^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow R = 5\ \text{cm} \end{matrix}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 \Rightarrow V = \frac{500}{3}\pi\ \text{cm}^3$$

$$S = 4\pi R^2 \Rightarrow S = 4 \cdot \pi \cdot 5^2 \Rightarrow S = 100\pi\ \text{cm}^2$$

2. Calcule o volume e a superfície de uma esfera cujo círculo máximo tem área igual a 100π cm².

$S_{círculo} = \pi r^2 \Rightarrow 100\pi = \pi r^2 \Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow r = 10$ cm

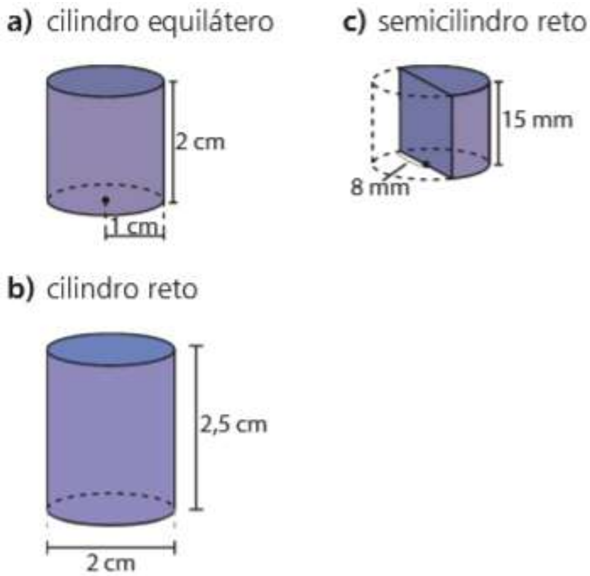
O raio do círculo máximo é igual ao raio da esfera (r = R).

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 \Rightarrow V = \frac{4\,000}{3}\pi\ \text{cm}^3$$

$$S = 4\pi R^2 \Rightarrow S = 4 \cdot \pi \cdot 10^2 \Rightarrow S = 400\pi\ \text{cm}^2$$

	Nível: **Ensino Médio**	Área de conhecimento: **Matemática**	VALOR:
	Disciplina: **BOATEMÁTICA** **2ª SÉRIE TURMA:**_______		3º Bimestre
	Data: ____/____/_____	**Exercícios sobre Cilindro Circular**	
	Aluno (a)____		

1. Calcule a área lateral, a área total e o volume dos sólidos cujas medidas estão indicadas nas figuras.



2. Calcule o volume de um cilindro cuja altura mede 10 cm e o diâmetro da base mede 6,2 cm. Utilize o valor de 3,14 para π.

3. Um tambor cilíndrico tem uma base de 60 cm de diâmetro e a altura de 100 cm. Calcule a capacidade desse tambor. Utilize o valor de 3,14 para o π.

4. Um cilindro circular reto tem 6 cm de altura, e o raio da base mede 2cm. Determine a área lateral e o volume desse cilindro.

5. Determine o volume de um cilindro, sabendo que sua área lateral é igual a 250 π cm^2 e que o raio de sua base mede 10cm.

6. Uma lata de óleo cilíndrica possui as seguintes medidas internas: raio da base = 4 cm e altura = 22 cm. Nesta lata, é possível armazenar mais que um litro de óleo?

8. Um reservatório cilíndrico de armazenamento de água possui internamente 8 m de diâmetro e 14 m de altura e está vazio. Se ele receber água à razão de 160 litros por minuto, qual é o menor número inteiro de dias necessários para enchê-lo completamente? Use π = 22/7.

9. O perímetro a seção meridiana de um cilindro reto mede 28 cm. Sabendo que a área lateral do cilindro é 48 π cm^2, determine seu volume.

10. Um cilindro reto tem 30 π m^2 de área lateral e 45 π m^3 de volume. Determine
a) a medida de sua altura;
b) sua área total.

11. Calcule o volume do cone cujo raio da base mede 4 cm e cuja altura mede 5 cm.

12. Determine a área da base de um cone de revolução de 6 cm de altura cujo volume é 128 π cm^2.

13. Um cone circular reto tem 20 dm de altura e sua geratriz mede 25dm. Determine a área total e o volume desse cone.

14. Em alguns comércios, encontramos “guarda-chuvas” de chocolate.

Considere que cada guarda-chuva tem o formado de um cone circular reto com 4 cm de diâmetro da base e 6cm de altura. Sabendo que a densidade do cacau usado na fabricação desse chocolate é de 1,05g/cm^3, determine a massa de cacau, em quilogramas, necessário para preparar 2500 desses cones. Use $\pi = 3,1$.