ESCOLA ESTADUAL FREDERICO JOSÉ PEDREIRA NETO	Turma: ____________	VALOR: Data: ____/____/____
PROFESSOR:	ALUNO (A):	

BOATEMÁTICA - POLINÔMIOS

Definição

Um polinômio na variável complexa x é uma expressão dada por:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

em que:

- $a_n, a_{n-1}, \ldots a_2, a_1, a_0$ são números complexos chamados **coeficientes** do polinômio; a_0 é o **coeficiente independente** do polinômio.
- *n* é um número natural.
- o **grau** do polinômio é o número natural correspondente ao maior expoente de *x*, com coeficiente não nulo.

Grau de um Polinômio

1 Exemplo

- $4x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}x - 7$ é um polinômio de grau 3.
- $-\frac{1}{6}x^5 + x^2 - 3x + 1$ é um polinômio de grau 5.
- $2ix^2 + x - 2$ é um polinômio de grau 2.
- $x^6 - ix^3 + 4x^2 - 3i$ é um polinômio de grau 6.
- $x + 4$ é um polinômio de grau 1.
- -7 é um polinômio de grau 0.

Observação

Não representam polinômios:

a) $f(x) = x + x^{1/2} + 2$, devido ao expoente fracionário.

b) $f(x) = -1 + 2x + x^{-3}$, devido ao expoente negativo.

EXERCÍCIOS

Valor numérico de um polinômio

O valor numérico de um polinômio $P(x)$, para $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ é o valor que se obtém substituindo **x** por α e fazendo as operações indicadas.

Exemplos:

1. Calcule o valor numérico de $P(x) = x^2 - 3x - 4$, nos seguintes casos:

a) para $x = 1 \Rightarrow P(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 - 4 = -6$

b) para $x = 4 \Rightarrow P(4) = 4^2 - 3 \cdot 4 - 4 = 0$

c) para $x = -1 \Rightarrow P(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 4 = 0$

Nota

Chama-se raiz ou zero da função polinomial o valor de **x** para o qual $P(x) = 0$. Assim, se $P(a) = 0$, então **a** é uma raiz ou um zero de $P(x)$. No exemplo anterior, onde $P(x) = x^2 - 3x - 4$, os números 4 e -1 são raízes do polinômio, pois $P(4) = 0$ e $P(-1) = 0$.

2. Dado o polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, verifique quais dos números a seguir: -1, 0, 1, 2 e 3 são raízes desse polinômio.

- para $x = -1 \Rightarrow P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 = 0$
  Como $P(-1) = 0$, então -1 é uma raiz desse polinômio.

9 Determine **m**, **n** e **p** para que o polinômio $P(x) = (m + 3)x^2 +$

- para $x = 0 \Rightarrow P(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 - 0 + 2 = 2$
  Como $P(0) \neq 0$, então 0 não é uma raiz desse polinômio.
- para $x = 1 \Rightarrow P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 0$
  Como $P(1) = 0$, então 1 é uma raiz desse polinômio.
- para $x = 2 \Rightarrow P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 0$
  Como $P(2) = 0$, então 2 é uma raiz desse polinômio.
- para $x = 3 \Rightarrow P(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 3 + 2 = 8$
  Como $P(3) \neq 0$, então 3 não é uma raiz desse polinômio.

Resposta: São raízes os números -1, 1 e 2.

Polinômios idênticos

Considere dois polinômios $P_1(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ e $P_2(x) = b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot x + b_0$. Eles serão idênticos, e se indica $P_1(x) \equiv P_2(x)$, quando:

$a_n = b_n;\ a_{n-1} = b_{n-1};\ \cdots;\ a_1 = b_1;\ a_0 = b_0$

Exemplo:

Sejam dois polinômios $P_1(x) = (m + 3)x^2 + 3x + q$ e $P_2(x) = 5x^2 + (n - 2)x + 3$. Para que $P_1(x) \equiv P_2(x)$, devemos ter:

$$\begin{cases} m + 3 = 5 \Rightarrow m = 2 \\ 3 = n - 2 \Rightarrow n = 5 \\ q = 3 \end{cases}$$

como fazemos: retiramos os parênteses e reduzimos os termos semelhantes.

Exemplos:

1. $(5x^3 - 4x^2 + 3x - 7) + (x^3 - 2x^2 - x + 3) = 5x^3 - 4x^2 + 3x - 7 + x^3 - 2x^2 - x + 3 = 6x^3 - 6x^2 + 2x - 4$

2. $(8x^2 + 3x - 10) - (5x^2 - 3x + 2) = 8x^2 + 3x - 10 - 5x^2 + 3x - 2 = 3x^2 + 6x - 12$

3. $(7x^2 - 4x + 5) + (3x^2 + 9x - 3) - (5x + 10) = 7x^2 - 4x + 5 + 3x^2 + 9x - 3 - 5x - 10 = 10x^2 - 8$

Observação

Se os parênteses vêm precedidos de $(-)$ trocamos todos os sinais de dentro.

Multiplicação

Observe como fazemos: multiplicamos cada termo de um polinômio por todos os termos do outro polinômio.

Exemplo:

$$(2x - 3)\,(3x^2 + 4x - 5) = 6x^3 + 8x^2 - 10x - 9x^2 - 12x + 15$$

Divisão

Dados dois polinômios $P_1(x)$ e $P_2(x)$ não identicamente nulos, dividir $P_1(x)$ por $P_2(x)$ consiste em obter dois polinômios $Q(x)$ (**quociente**) e $R(x)$ (**resto**), tais que:

- $P_1(x) \equiv P_2(x) \cdot Q(x) + R(x)$;
- o grau do resto é menor que o grau do divisor ou o resto é identicamente nulo.

Exemplos:

1. Seja $(10x^2 - 23x + 12) : (5x - 4)$:

$$\begin{array}{rrr|l}
\multicolumn{3}{c}{\text{dividendo}} & \text{divisor} \\
10x^2 & -\ 23x & +\ 12 & 5x - 4 \\ \cline{4-4}
-10x^2 & +\ 8x & & 2x - 3 \\ \cline{1-3}
 & -15x & +\ 12 & \text{quociente} \\
 & +15x & -\ 12 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

a) Dividimos $10x^2$ por $5x$, obtendo $2x$.

b) Multiplicamos $2x$ por $5x - 4$ e adicionamos o produto $10x^2 - 8x$, com sinal trocado, ao dividendo.

c) Dividimos $-15x$ por $5x$, obtendo -3.

d) Multiplicamos -3 por $5x - 4$ e adicionamos o produto $-15x + 12$, com sinal trocado, a $-15x + 12$.

Então: $Q(x) = 2x - 3$ e $R(x) = 0$

2. $(18x^4 - 36x^3 + 19x^2 - 15x) : (3x^2 - 5x)$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
18x^4 & -36x^3 & +19x^2 & -15x & 3x^2 - 5x \\
\cline{5-5}
-18x^4 & +30x^3 & & & 6x^2 - 2x + 3 \\
\cline{1-4}
 & -6x^3 & +19x^2 & -15x & \\
 & +6x^3 & -10x^2 & & \\
\cline{2-4}
 & & 9x^2 & -15x & \\
 & & -9x^2 & +15x & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

3. $(2x^3 + 7x^2 - 12x + 1) : (2x^2 - 3x)$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +7x^2 & -12x & +1 & 2x^2 - 3x \quad \text{(grau 2)} \\
\cline{5-5}
-2x^3 & +3x^2 & & & x + 5 \\
\cline{1-4}
 & 10x^2 & -12x & +1 & \\
 & -10x^2 & +15x & & \\
\cline{2-4}
 & & 3x & +1 & \text{(grau 1)}
\end{array}
$$

RELAÇÕES DE GIRARD

As relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica foram estabelecidas pelo matemático Albert Girard no século XVII. Vamos escrever essas relações para as seguintes equações:

$ax^2 + bx + c = 0$ de raízes r_1 e r_2

- soma das duas raízes:

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$$

- produto das duas raízes:

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$$

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ de raízes r_1, r_2 e r_3

- soma das três raízes:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}$$

- soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas:

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \frac{c}{a}$$

- produto das três raízes:

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\frac{d}{a}$$

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ de raízes r_1, r_2, r_3 e r_4

- soma das quatro raízes:

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{b}{a}$$

- soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas:

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4 = \frac{c}{a}$$

- soma dos produtos das raízes tomadas três a três:

$$r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4 = -\frac{d}{a}$$

- produto das quatro raízes:

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = \frac{e}{a}$$

Exemplos

1. Calcular a soma e o produto das raízes da equação $3x^2 - 8x - 6 = 0$.

- $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{-(-8)}{3} \Rightarrow r_1 + r_2 = \dfrac{8}{3}$
- $r_1 \cdot r_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-6}{3} \Rightarrow r_1 \cdot r_2 = -2$

2. Se r_1, r_2 e r_3 são raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$, calcule o valor de $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3}$.

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3} = \frac{\frac{c}{a}}{-\frac{d}{a}} = \frac{\frac{3}{1}}{-\frac{(-4)}{1}} = \frac{3}{4}$$

TEOREMA DO RESTO

Considerando a divisão de um polinômio P(x) por (x – a), onde obtemos quociente Q(x) e resto R(x):

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-a \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

Então, temos: **$P(x) \equiv (x - a) \cdot Q(x) + R(x)$**

Fazendo x – a = 0 ➡ x = a temos:

P(a) = R(a) ➡ “ O resto da divisão de um polinômio P(x) pelo binômio x – a é igual a P(a)”

EXEMPLO:

6º - Dividindo $P(x) = x^2 - 4x - 5$ por x – 3, o resto será:

$R(3) = P(3) = 3^2 - 4 . 3 - 5 = -8$

7º - O resto da divisão de $P(x) = x^2 + 3x - 1$ por x + 1 será:

$R(-1) = P(-1) = (-1)^2 + 3.(-1) - 1 = -3$

TEOREMA DE D’ALEMBERT

“Um polinômio P(x) é divisível por **x – a** se e somente se P(a) = 0”.

Este teorema é uma consequência imediata do teorema do resto: R(a) = P(a), pois se P(x) é divisível por x – a, então R(a) = 0, o que é equivalente a P(a) = 0.

EXEMPLO:

8º - O polinômio $P(x) = x^2 - 4x - 5$ é divisível por x – 5, pois: **$P(5) = 5^2 - 4.5 - 5 = 0$**

9º - Qual o valor de **m** para que $P(x) = x^3 - x^2 + mx + 7$ seja divisível por x + 2?

Para que P(x) seja divisível por x + 2, basta impormos P(- 2)= 0, então:

$(-2)^3 - (-2)^2 + m.(-2) + 7 = 0$

$-8 - 4 - 2m + 7 = 0$

- 2m = 5 (- 1)

$$m = -\frac{5}{2}$$

DISPOSITIVO PRÁTICO DE BRIOT-RUFFINI

1ª Etapa — organizar os coeficientes de P(x) no dispositivo

No método dispomos apenas os coeficientes de P(x) numa espécie de tabela, um 'mostruário' ou, simplesmente, em um dispositivo. Nesse dispositivo os coeficientes das potências ocupam uma posição exclusiva para eles, em uma coluna específica.

Por exemplo, para P(x) = x^2 − 6x + 9 o dispositivo fica assim (TI é o *Termo Independente*):

Coeficientes	x^2	x	TI
	1	−6	9

2ª Etapa — registrar a raiz do divisor de P(x) no dispositivo

Vamos exemplificar essa etapa usando x + 2 como um divisor de P(x). O valor de x que é raiz de x + 2 é o número que o anula, ou seja, que faz com que x + 2 = 0 . Logo, a raiz de x + 2 é −2 .

A raiz é colocada na parte destacada, em primeiríssimo lugar:

−2	1	−6	9
	1		

3ª Etapa — calcular os coeficientes do quociente e o resto da divisão de P(x) por x+2 no dispositivo

O procedimento agora é repetitivo e segue o mesmo princípio até esgotar as posições vagas da segunda linha e que estão abaixo dos coeficientes de P(x).

Multiplicar o último número desta linha pela raiz do divisor e somar com o coeficiente de P(x) que está acima da posição vaga.

Em destaque os números que serão objeto do cálculo descrito acima:

−2	1	−6	9
	1	vaga	

Na posição vaga devemos colocar $1\times(-2)+(-6)=-8$.

−2	1	−6	9
	1	−8	

Como ainda temos uma posição disponível abaixo do 9 , devemos repetir o procedimento, mas com estes números destacados:

−2	1	−6	9
	1	−8	vaga

Na posição vaga devemos colocar $(-8)\times(-2)+(9)=25$.

−2	1	−6	9
	1	−8	25

No final do processo, sempre o último número corresponde ao resto, ou seja, **R(x) = 25**

No dispositivo, da esquerda para a direita temos os coeficientes do quociente, ou seja,

Q(x) = 1x – 8 = x – 8