

**FUNÇÃO QUADRÁTICA**

Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que a todo número  $x \in \mathbb{R}$  associa o número  $ax^2 + bx + c$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  reais, e  $a \neq 0$ , é denominada **função quadrática**.

$$x \rightarrow ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ ou } y = ax^2 + bx + c$$

Dizemos que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os **coeficientes** da função.

**Exemplos**

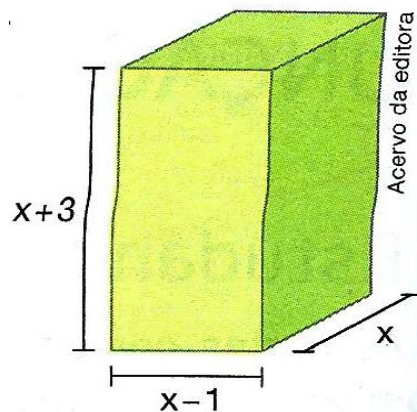
- $f(x) = x^2 + 2x - 7$ , com  $a=1$ ,  $b=2$  e  $c=-7$
- $g(x) = -x^2 - 9x$ , com  $a=-1$ ,  $b=-9$  e  $c=0$
- $h(x) = 5x^2 + 1$ , com  $a=5$ ,  $b=0$  e  $c=1$
- $m(x) = -7x^2$ , com  $a=-7$ ,  $b=0$  e  $c=0$

As funções quadráticas em que  $b=0$  e  $c=0$ ,  $b=0$  e  $c \neq 0$ , ou  $b \neq 0$  e  $c=0$  são denominadas **incompletas**. Nos exemplos acima,  $g$ ,  $h$  e  $m$  são funções quadráticas incompletas. Já as funções quadráticas **completas** são aquelas em que  $b \neq 0$  e  $c \neq 0$ .

**ATIVIDADES RESOLVIDAS**

**R1.** Considere o prisma reto representado ao lado, cujas medidas estão indicadas em centímetros.

- a) Escreva uma função  $f$  que determine a área da superfície desse prisma em função de  $x$ .
- b) Calcule a área da superfície do prisma se  $x=5$ .



a) A área da superfície do prisma é dada por:

$$f(x) = \underbrace{2 \cdot (x-1) \cdot (x+3) + 2 \cdot (x+3) \cdot x}_{\text{área lateral}} + 2 \cdot \underbrace{(x-1) \cdot x}_{\text{área da base}} \Rightarrow f(x) = 6x^2 + 8x - 6$$

b) Para  $x=5$ , temos:

$$f(5) = 6 \cdot 5^2 + 8 \cdot 5 - 6 = 184 \rightarrow 184 \text{ cm}^2$$

## ATIVIDADES

1. Quais das funções a seguir são quadráticas?

a)  $f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x + 3$

b)  $f(x) = x^2 - 8$

c)  $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$

d)  $f(x) = 2^x + 5x - 9$

e)  $f(x) = x(7 - x)$

f)  $f(x) = (x + 1,9)x^2 - 8,3x + 6,5$

2. Determine os valores dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  das funções quadráticas na forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

a)  $f(x) = x^2 + x + 2$

d)  $f(x) = 3x - 1 - 9x^2$

b)  $f(x) = -4x^2 + 2,5$

e)  $f(x) = 7,6x^2$

c)  $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{7}x$

f)  $f(x) = 2x \left( -x - \frac{5}{x} + 6 \right)$

3. Dadas as funções  $f(x) = 2x^2 - 6x - 4$  e  $g(x) = -3x^2 - 5x + 1$  calcule:

a)  $f(3)$

e)  $g(1)$

b)  $f(-2)$

f)  $g(-4)$

c)  $f(0)$

g)  $g(0)$

d)  $f(-0,2)$

h)  $g\left(\frac{1}{2}\right)$

4. Considere a função  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6, & \text{para } x \leq -1 \\ 3x^2 + x + 2, & \text{para } -1 < x < 3. \\ -x - 5, & \text{para } x \geq 3 \end{cases}$

Calcule:

a)  $f(-2)$

c)  $f(0)$

e)  $f(3)$

b)  $f(-1)$

d)  $f\left(\frac{2}{3}\right)$

f)  $f(4,5)$

## GRÁFICOS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

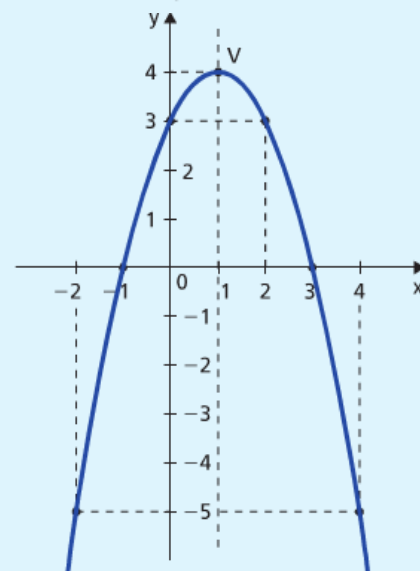
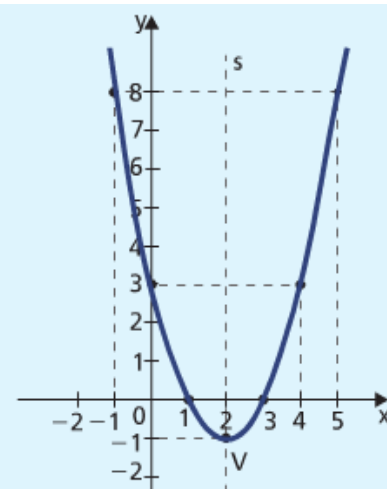
exemplos de funções quadráticas,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ , em que  $a = 1$ ,  $b = -4$  e  $c = 3$ . Temos:

- se  $x = -1$ ,  $y = (-1)^2 - 4(-1) + 3 = 8$
- se  $x = 0$ ,  $y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$
- se  $x = 1$ ,  $y = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$
- se  $x = 2$ ,  $y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$
- se  $x = 3$ ,  $y = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0$
- se  $x = 4$ ,  $y = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 3$
- se  $x = 5$ ,  $y = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 8$ , etc.

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$ , em que  $a = -1$ ,  $b = 2$  e  $c = 3$ . Para facilitar o cálculo, vamos escrever  $f(x) = x(2 - x) + 3$ . Temos:

- para  $x = -2$ ,  $f(-2) = -2(2 + 2) + 3 = -5$
- para  $x = -1$ ,  $f(-1) = -1(2 + 1) + 3 = 0$
- para  $x = 0$ ,  $f(0) = 0(2 - 0) + 3 = 3$
- para  $x = 1$ ,  $f(1) = 1(2 - 1) + 3 = 4$
- para  $x = 2$ ,  $f(2) = 2(2 - 2) + 3 = 3$
- para  $x = 3$ ,  $f(3) = 3(2 - 3) + 3 = 0$
- para  $x = 4$ ,  $f(4) = 4(2 - 4) + 3 = -5$  etc.



**Concavidade**

Na função  $y = ax^2 + bx + c$ :

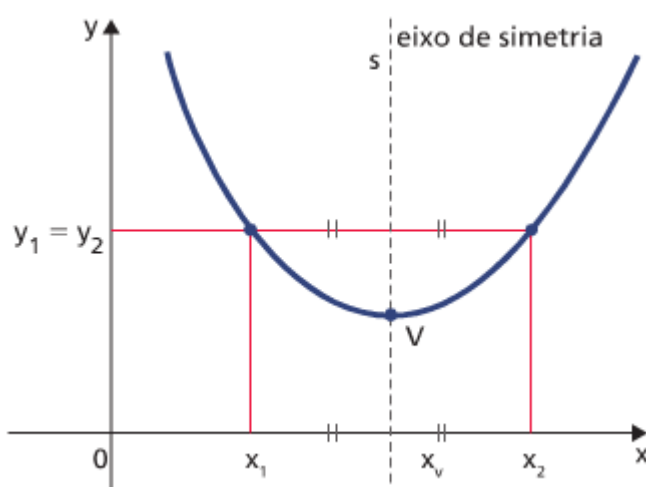
- quando  $a > 0$ , o gráfico é uma parábola de concavidade para cima;
- quando  $a < 0$ , o gráfico é uma parábola de concavidade para baixo.

## Vértice

Consideremos a função:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

A parábola correspondente a essa função apresenta um eixo de simetria, que é uma reta  $s$  paralela ao eixo  $y$ . O eixo de simetria intercepta a parábola no ponto **V**, que denominamos **vértice**.



## Cálculo da abscissa e da ordenada do vértice

em toda parábola  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , a abscissa do vértice é  $x_v$  dada por:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

O cálculo de  $y_v$  pode ser feito substituindo  $x$  por  $x_v$  na função.

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

## EXEMPLO

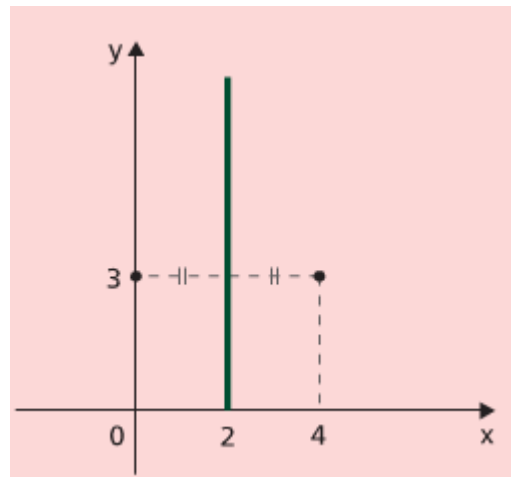
Obtenha o vértice da parábola  $y = x^2 - 4x + 3$ .

$$a = 1, b = -4 \text{ e } c = 3$$

$$X_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$$

Calcule agora o  $y_v$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$



## RAIZES OU ZERO DA FUNÇÃO. EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Usando a fórmula de BHÁSKARA

Exemplo:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$



1º - Para obter os zeros da função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , definida pela lei  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ , temos:  $a = 1$ ,  $b = -5$  e  $c = 6$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \rightarrow$$

$$x = 3 \quad e \quad x = 2$$

2º - Calcule as raízes da função pelas leis:

a)  $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

b)  $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$

## Exercícios

- 1) Temos funções quadráticas  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Para cada uma delas, diga se o gráfico é parábola côncava para cima ou para baixo, ache o vértice e faça o gráfico.

$$f(x) = x^2 - 2x + 2 \quad f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad f(x) = -x^2 + 5x - 3$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad f(x) = -x^2 + 4x \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$$

$$f(x) = -2x^2 - 2x - 1 \quad f(x) = x^2 + 1$$

**2)** Determine as raízes (zeros) reais de cada uma das funções dadas pelas seguintes leis:

a)  $y = 2x^2 - 3x + 1$

f)  $y = 3x^2$

b)  $y = 4x - x^2$

g)  $y = x^2 - 5x + 9$

c)  $y = -x^2 + 2x + 15$

h)  $y = -x^2 + 2$

d)  $y = 9x^2 - 1$

i)  $y = x^2 - x - 6$

e)  $y = -x^2 + 6x - 9$

**03)** Resolva, em  $\mathbb{R}$ , as seguintes equações:

a)  $x^2 - 3\sqrt{3}x + 6 = 0$

b)  $(3x - 1)^2 + (x - 2)^2 = 25$

c)  $2 \cdot (x + 3)^2 - 5 \cdot (x + 3) + 2 = 0$

d)  $x + \frac{1}{x} = 3$

e)  $(x - 1) \cdot (x + 3) = 5$

**04)** Em um retângulo, uma dimensão excede a outra em 4 cm. Sabendo que a área do retângulo é  $12 \text{ cm}^2$ , determine suas dimensões. (Use área de um retângulo).

**05)** As idades de dois irmãos têm soma igual a 8 anos. Daqui a 2 anos, uma delas será igual ao quadrado da outra. Determine as duas dimensões. (Use o sistema de equações)

### **Soma e produto das raízes**

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

**Utilizando essas fórmulas, Podemos obter os valores da soma e do produto das raízes sem resolver a equação.**

**Exemplo:**

**1º - Obtenha a soma e o produto das raízes da equação:**

$$3x^2 + 2x - 5$$

**06)** Determinar  $k \in \mathbb{R}$ , a fim de que uma das raízes da equação  $x^2 - 5x + (k + 3) = 0$  seja igual ao quádruplo da outra.

**Solução:** usando a fórmula temos:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 5 \quad (1) \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = k + 3 \quad (2)$$

Do enunciado, vem  $x_1 = 4x_2$  (3)

Substituindo (3) em (1), temos:  $4x_2 + x_2 = 5 \Rightarrow 5x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 1$

Sendo  $x_2 = 1$  teremos:  $x_1 = 4 \cdot 1 = 4$  . |

$$\text{De (2), vem: } x_1 \cdot x_2 = \frac{(k+3)}{1} \Rightarrow 4 \cdot 1 = \frac{(k+3)}{1} \Rightarrow k = 1$$

**07)** Determinar  $k \in \mathbb{R}$ , a fim de que uma das raízes da equação  $x^2 - 10x + (k + 5) = 0$  seja igual ao dobro da outra.

**08)** Calcule a soma e o produto das raízes das seguintes equações de 2º grau:

a)  $3x^2 - x - 5 = 0$

d)  $x(x - 3) = 2$

b)  $-x^2 + 6x - 5 = 0$

e)  $(x - 4) \cdot (x + 5) = 0$

c)  $2x^2 - 7 = 0$

**09)** Sejam  $r_1$  e  $r_2$  as raízes da equação de 2º grau  $2x^2 - 6x + 3 = 0$ . Determine o valor de:

a)  $r_1 + r_2$

c)  $(r_1 + 3) \cdot (r_2 + 3)$

e)  $r_1^2 + r_2^2$

b)  $r_1 \cdot r_2$

d)  $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$

**10)** A diferença entre as raízes da equação  $x^2 + 11x + p = 0$  é igual a 5. Com base nesse dado:

a) determine as raízes

b) encontre o valor de  $p$ .

**11)** Em cada um dos itens abaixo, determine os pontos onde o gráfico da função intercepta o eixo  $x$ . Em cada caso encontre também as coordenadas do vértice da parábola.

a)  $g(x) = x^2 - 2$       b)  $f(x) = 3x^2 + 8x$       c)  $h(x) = 6x^2 + 7x - 5$

d)  $P(t) = t^2 - 4t + 13$       e)  $G(x) = 13 - x^2$       f)  $H(x) = -x^2 - 14x - 45$

**12) Prova Resolvida PC MG 2008 – Acadepol (Adaptada)** – O número de ocorrências registradas das 12 às 18 horas em um dia do mês de janeiro, em uma delegacia do interior de Minas Gerais, é dado por  $f(t) = -t^2 + 30t - 216$ , em que  $12 \leq t \leq 18$  é a hora desse dia. Determine o valor de cada hora especificada abaixo:

a)  $t = 12h$       b)  $t = 13h$       c)  $t = 14h$       d)  $t = 15h$       e)  $t = 16h$       f)  $t = 17h$

### CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA

#### EXEMPLOS:

1º) Fazendo o esboço do gráfico da função quadrática dada por  $y = 2x^2 - 5x + 2$ .

Características:

- **Concavidade** volta para cima, pois  $a = 2 > 0$
- **Raízes:** faça  $y = 0$  e resolva pela fórmula de Bháskara.

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} x' = \frac{5+3}{4} = 2 \text{ logo temos } (2, 0) \\ x'' = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \text{ logo temos } \left(\frac{1}{2}, 0\right) \end{cases}$$

- **Faça  $y = 0$ :**

$$y = 2x^2 - 5x + 2 = 2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 2 = 2 \text{ logo temos } (0, 2)$$

- **Vértice:**  $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$

Logo temos as seguintes coordenadas:

$$(0, 2), \left(\frac{1}{2}, 0\right), (2, 0), \left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$$

**Veja o gráfico que esta na página 108 do exemplo 12 e observe os outros exemplos da página 109.**

#### EXERCÍCIOS

**13)** Faça o gráfico das funções dadas pelas leis seguintes, com domínio em  $\mathbb{R}$ , e defina se tem ponto de máximo ou mínimo.

a)  $y = x^2 - 6x + 8$

e)  $y = -x^2 + \frac{1}{4}$

b)  $y = -2x^2 + 4x$

f)  $y = x^2 + 2x + 5$

c)  $y = x^2 - 4x + 4$

g)  $y = -3x^2$

d)  $y = (x - 3) \cdot (x + 2)$

**14)** Faça o gráfico das funções dadas pelas leis seguintes, com domínio em  $\mathbb{R}$ , destacando os intervalos em que a função é crescente ou decrescente.

a)  $y = 4x^2 - 2x$

b)  $y = -2x^2 + 4x - 5$

c)  $y = -x^2 - 2x - 1$

d)  $y = -x^2 + 2x + 8$