

Função afim

4

Introdução

Antes de apresentarmos o conceito de função afim, vejamos alguns exemplos envolvendo questões do dia a dia.

Exemplo 1

Antônio Carlos pegou um táxi para ir à casa de sua namorada que fica a 15 km de distância. O valor cobrado engloba o preço da parcela fixa (bandeirada) de R\$ 4,00 mais R\$ 1,60 por quilômetro rodado (não estamos considerando aqui o tempo em que o táxi ficaria parado em um eventual congestionamento).

Ou seja, ele pagou $15 \cdot \text{R\$ } 1,60 = \text{R\$ } 24,00$ pela distância percorrida mais R\$ 4,00 pela bandeirada; isto é: $\text{R\$ } 24,00 + \text{R\$ } 4,00 = \text{R\$ } 28,00$.

Se a casa da namorada ficasse a 25 km de distância, Antônio Carlos teria pago, pela corrida: $25 \cdot \text{R\$ } 1,60 + \text{R\$ } 4,00 = \text{R\$ } 44,00$.

Podemos notar que, para cada distância x percorrida pelo táxi, há certo preço $p(x)$ para a corrida. A fórmula que expressa $p(x)$ (em reais) em função de x (em quilômetros) é:

$$p(x) = 1,60 \cdot x + 4,00$$

que é um exemplo de **função polinomial do 1º grau** ou **função afim**.



Giuliano Gomes/Folha Press

Exemplo 2

Um corretor de imóveis recebe mensalmente da empresa em que trabalha um salário composto de duas partes:

- uma parte fixa de R\$ 500,00;
- outra parte variável, que corresponde a um adicional de 2% sobre o valor das vendas realizadas no mês.

Em certo mês, as vendas somaram R\$ 300 000,00.

Para calcular quanto o corretor recebeu de salário, fazemos:

$$= 500 + \frac{2}{100} \cdot 300\,000 = 500 + 6\,000 = 6\,500$$

Salário: R\$ 6 500,00

Em outro mês, as vendas somaram apenas R\$ 80 000,00. Nesse mês o corretor recebeu:

$$\begin{aligned} & 500 + 2\% \cdot 80\,000 = \\ & = 500 + 1\,600 = 2\,100 \\ & \text{salário: R\$ 2 100,00} \end{aligned}$$

Observamos que, para cada total x de vendas no mês, há um certo salário $s(x)$ pago ao corretor. A fórmula que expressa $s(x)$ em função de x é:

$$s(x) = 500 + 0,02 \cdot x$$

que é um exemplo de função afim.



Ilustra Cartoon

Exemplo 3

Restaurantes *self-service* por quilo (ou “peso”) podem ser encontrados em todas as regiões do Brasil. Em um deles, cobra-se R\$ 2,00 por cada 100 g de comida. Dois amigos serviram-se, nesse restaurante, de 620 g e 410 g. Quanto pagou cada um?

Inicialmente, observe que R\$ 2,00 por 100 g equivale a R\$ 20,00 por quilograma (ou quilo, simplesmente).

Assim, quem se serviu de 620 g = 0,62 kg, pagou $0,62 \cdot 20 = 12,40$ reais; o outro amigo pagou $0,41 \cdot 20 = 8,20$ reais.

Em geral, o valor (y) pago, em reais, varia de acordo com a quantidade de comida (x), em quilogramas. A lei que relaciona y e x é: $y = 20 \cdot x$, que é outro exemplo de função polinomial do 1º grau.

Definição

Chama-se **função polinomial do 1º grau**, ou **função afim**, qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais dados e $a \neq 0$.

Na lei $f(x) = ax + b$, o número a é chamado **coeficiente** de x e o número b é chamado **termo constante** ou **independente**.

Exemplo 4

$$\text{■ } f(x) = 5x - 3, \text{ em que } a = 5 \text{ e } b = -3$$

$$\text{■ } f(x) = -2x - 7, \text{ em que } a = -2 \text{ e } b = -7$$

$$\text{■ } f(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{5}, \text{ em que } a = \frac{1}{3} \text{ e } b = \frac{2}{5}$$

$$\text{■ } f(x) = 11x, \text{ em que } a = 11 \text{ e } b = 0$$

$$\text{■ } y = -x + 3, \text{ em que } a = -1 \text{ e } b = 3$$

$$\text{■ } y = -2,5x + 1, \text{ em que } a = -2,5 \text{ e } b = 1$$

Função linear

Um caso particular de função afim é aquele em que $b = 0$. Nesse caso, temos a função afim f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = ax$ com a real e $a \neq 0$, que recebe a denominação especial de **função linear**.

5

Exemplo

■ $f(x) = 3x$ ($a = 3$ e $b = 0$)

■ $f(x) = -4x$ ($a = -4$ e $b = 0$)

■ $f(x) = x$ ($a = 1$ e $b = 0$): neste caso a função f recebe o nome de **função identidade**.

Veja, na página 74, um texto que relaciona grandezas proporcionais com funções lineares.

Gráfico

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau, dada por $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy (isto é, é uma reta não paralela a nenhum dos eixos coordenados).

Demonstração:

Tomemos três pontos distintos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ pertencentes ao gráfico dessa função. Vamos mostrar que A , B e C estão alinhados, isto é, pertencem a uma mesma reta.

Como A , B e C são pontos do gráfico da função, suas coordenadas satisfazem a lei $y = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$. Temos:

$$\begin{cases} y_1 = a \cdot x_1 + b & (1) \\ y_2 = a \cdot x_2 + b & (2) \\ y_3 = a \cdot x_3 + b & (3) \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro, encontramos:

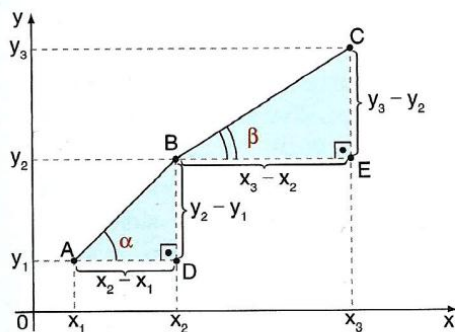
$$(3) - (2) \Rightarrow y_3 - y_2 = a(x_3 - x_2)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$$

Daí, vem:

$$\frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} \quad (4)$$

Vamos supor, por absurdo, que A , B e C não pertencessem a uma mesma reta, como mostra a figura:



Observemos os triângulos ABD e BCE , que são retângulos ($\hat{D} = \hat{E} = 90^\circ$) e têm lados proporcionais, pois, de acordo com (4), temos:

$$\frac{EC}{DB} = \frac{BE}{AD}$$

Nesse caso, os triângulos ABD e BCE são semelhantes e, portanto, seus ângulos correspondentes são congruentes, donde se conclui que $\alpha = \beta$, o que não poderia ocorrer.

A contradição veio do fato de supormos que A , B e C não pertencem a uma mesma reta.

Assim, A , B e C estão alinhados, isto é, pertencem a uma mesma reta.

Desse modo, está provado que o gráfico de uma função polinomial do 1º grau é uma reta.

Exercícios resolvidos

1. Construir o gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $y = 3x - 1$.

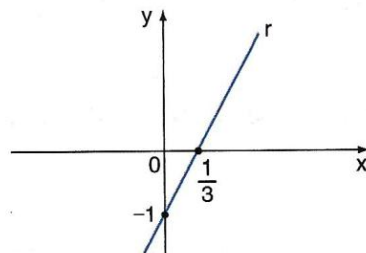
Solução:

Como o gráfico é uma reta, basta obter dois de seus pontos e ligá-los com o auxílio de uma régua:

- Para $x = 0$, temos $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$; portanto, um ponto é $(0, -1)$.
- Para $y = 0$, temos $0 = 3x - 1$; portanto, $x = \frac{1}{3}$ e outro ponto é $(\frac{1}{3}, 0)$.

Marcamos os pontos $(0, -1)$ e $(\frac{1}{3}, 0)$ no plano cartesiano e ligamos os dois com uma reta (reta r).

x	y
0	-1
$\frac{1}{3}$	0



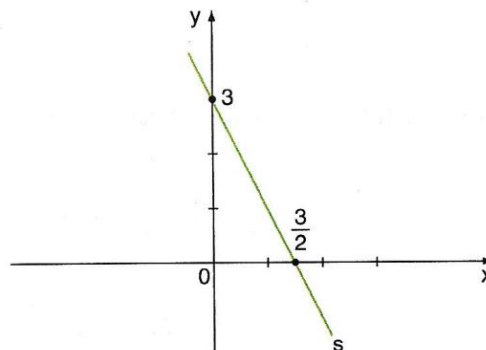
A lei $y = 3x - 1$ é também chamada **equação da reta r** .

2. Construir o gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $y = -2x + 3$.

Solução:

- Para $x = 0$, temos $y = -2 \cdot 0 + 3 = 3$; portanto, um ponto é $(0, 3)$.
- Para $y = 0$, temos $0 = -2x + 3$; portanto, $x = \frac{3}{2}$ e outro ponto é $(\frac{3}{2}, 0)$.

x	y
0	3
$\frac{3}{2}$	0



A lei $y = -2x + 3$ é também chamada **equação da reta s** .

3. Obter a equação da reta que passa pelos pontos $P(-1, 3)$ e $Q(1, 1)$.

Solução:

A reta $\overline{PQ}$ tem equação $y = ax + b$. Precisamos determinar a e b .

Como $(-1, 3)$ pertence à reta, temos:

$$3 = a(-1) + b, \text{ ou seja, } -a + b = 3$$

Como $(1, 1)$ pertence à reta, temos:

$$1 = a \cdot 1 + b, \text{ ou seja, } a + b = 1$$

Assim, a e b satisfazem o sistema:
$$\begin{cases} -a + b = 3 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

cujas soluções são $a = -1$ e $b = 2$. Portanto, a equação procurada é $y = -x + 2$.

Função constante

Vimos que a função afim f é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $y = ax + b$, com $a \neq 0$.

Quando em $y = ax + b$ temos $a = 0$, essa lei não define uma função afim, mas sim outro tipo de função denominada **função constante**.

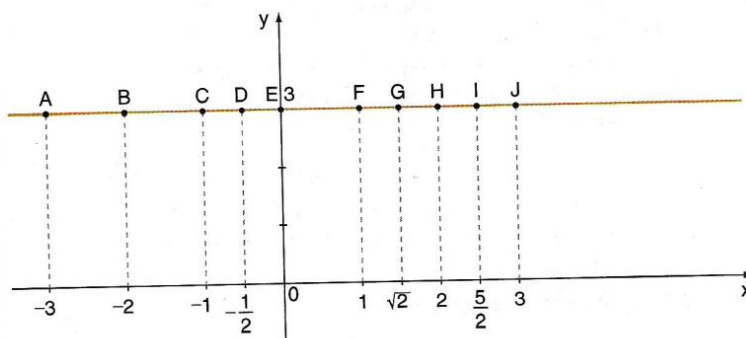
Portanto, chama-se função constante uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei $y = 0x + b$, ou seja, $y = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

6

Exemplo

Vamos construir o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $y = 3$ para todo x real:

x	y	ponto
-3	3	A
-2	3	B
-1	3	C
$-\frac{1}{2}$	3	D
0	3	E
1	3	F
$\sqrt{2}$	3	G
2	3	H
$\frac{5}{2}$	3	I
3	3	J



O gráfico é uma reta paralela ao eixo das abscissas.

É fácil perceber que a taxa média de variação da função constante $f(x) = b$, em que $b \in \mathbb{R}$, quando x varia de x_1 a x_2 , é igual a 0, quaisquer que sejam x_1 e x_2 , com $\{x_1, x_2\} \subset \mathbb{R}$ e $x_1 \neq x_2$.

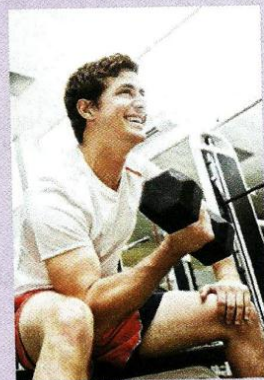
De fato,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{b - b}{x_2 - x_1} = 0.$$

Exercícios

- Um segurança trabalha em uma empresa e recebe um salário mensal de R\$ 780,00. Para aumentar sua renda, ele costuma fazer "extras" em uma casa noturna, onde recebe R\$ 70,00 por noite de trabalho.
 - Qual será sua renda mensal em um mês que ele trabalhar 3 noites na casa noturna?
 - Em um determinado mês sua renda mensal foi R\$ 1 270,00. Quantas noites ele trabalhou na casa noturna?
 - Expresse o salário mensal total (y) do segurança em função do número de noites (x) trabalhadas na casa noturna.

- A um mês de uma competição, um atleta de 75 kg é submetido a um treinamento específico para aumento de massa muscular, em que se anunciam ganhos de 180 gramas por dia. Suponha que isso realmente ocorra.



Thinstock/Getty Images

- a) Determine o "peso" do atleta após uma semana de treinamento.
- b) Encontre a lei que relaciona o "peso" do atleta (p), em quilogramas, em função do número de dias de treinamento (n). Faça um esboço do seu gráfico.
- c) Será possível que o atleta atinja ao menos 80 kg em um mês de treinamento?

3. Em uma cidade, a empresa de telefonia está promovendo a linha econômica. Sua assinatura é R\$ 20,00, incluindo 100 minutos a serem gastos em ligações locais para telefone fixo. O tempo de ligação excedente é tarifado em R\$ 0,10 por minuto.

- a) Calcule o valor da conta mensal de três clientes que gastaram, respectivamente, 80, 120 e 200 minutos em ligações locais.
- b) Se x é o número de minutos excedentes, qual é a lei da função que representa o valor (v) mensal da conta?

4. Uma caixa-d'água, de volume 21 m^3 , inicialmente vazia, começa a receber água de uma fonte à razão de 15 litros por minuto. Lembre que 1 m^3 equivale a 1000 litros.

- a) Quantos litros de água haverá na caixa após meia hora?
- b) Após x minutos de funcionamento da fonte, qual será o volume (y) de água na caixa, em litros?
- c) Após x minutos de funcionamento da fonte, qual será o volume (y) de água (em litros) necessário para preencher completamente a caixa?
- d) Em quanto tempo a caixa estará cheia?

5. Faça os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por:

- a) $y = x + 1$ d) $y = -x - 2$
 b) $y = -2x + 4$ e) $y = \frac{5}{2}$
 c) $y = 3x + 2$ f) $y = -1$

6. Construa o gráfico de cada uma das funções lineares, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dadas pelas leis:

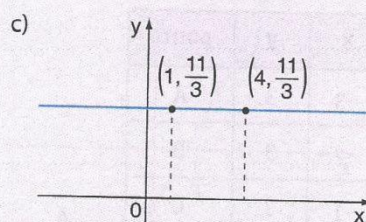
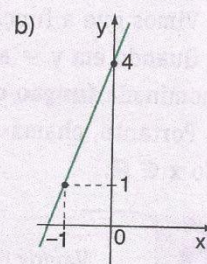
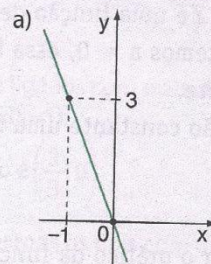
- a) $y = 2x$ c) $y = \frac{1}{2}x$
 b) $y = -3x$ d) $y = -x$

Após construir os quatro gráficos, é possível identificar uma propriedade comum a todos. Qual é essa propriedade?

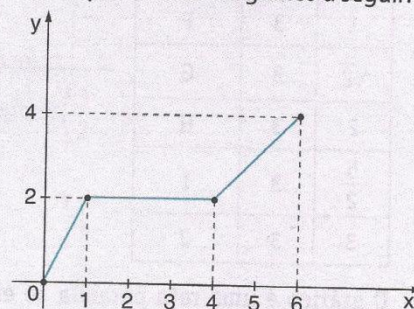
7. Uma reta passa pelos pontos $(-1, 5)$ e $(2, -4)$. Qual é a lei da função representada por essa reta?

8. Qual é a equação da reta que passa pelos pontos $(-4, 2)$ e $(2, 5)$?

9. Obtenha, em cada caso, a lei da função cujo gráfico é mostrado a seguir:



10. Considere uma função f , cujo domínio é $[0, 6]$, a qual está representada no gráfico a seguir:



Calcule:

- a) $f\left(\frac{1}{2}\right)$
 b) $f(3)$
 c) $f\left(\frac{11}{2}\right)$

11. Na figura estão representados os gráficos de duas funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = ax + b$. Calcule o valor de $g(8)$.

