



ESCOLA ESTADUAL FREDERICO JOSÉ PEDREIRA NETO

Turma: _____

VALOR: ____ pontos

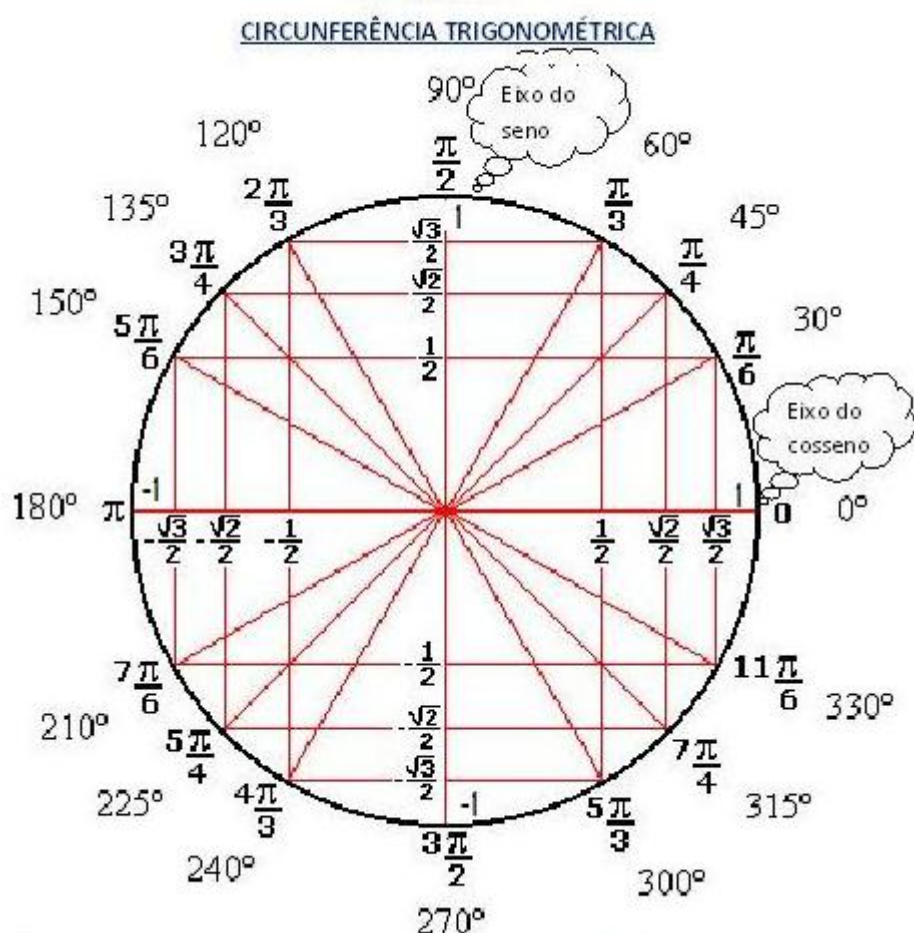
Data: ____/____/2017

PROFESSOR: MARCUS SALES

ALUNO (A):

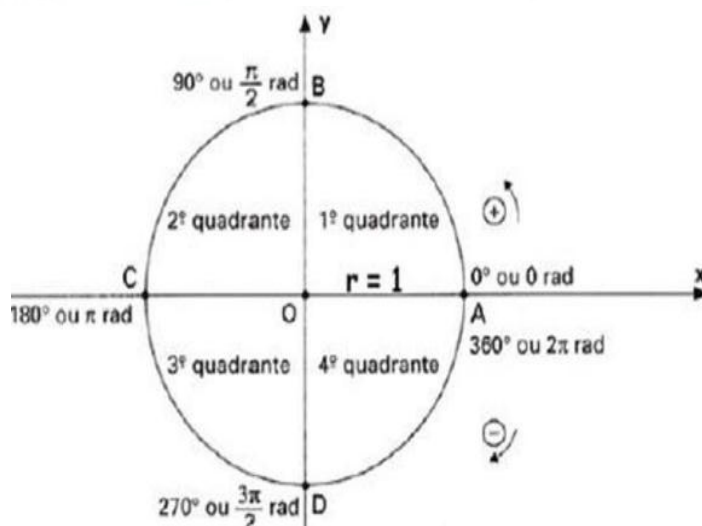
Relação entre as UNIDADES:

SISTEMA	UNIDADE FUNDAMENTAL	AMPLITUDE				
Sexagesimal	Grau	0	90°	180°	270°	360°
Circular	Radiano	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π



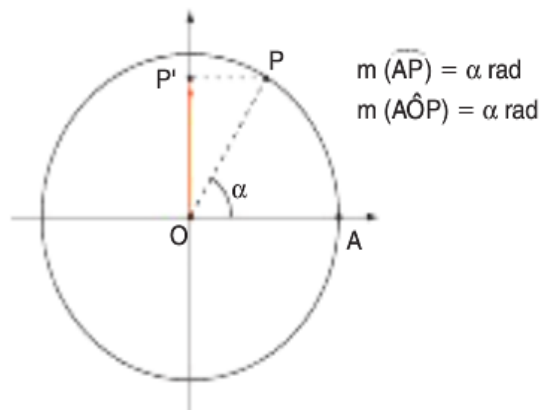
ARCOS NOTÁVEIS

	0°	30°	45°	60°	90°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	



Seno

Seja P um ponto da circunferência trigonométrica, imagem de um número real α , $0 \leq \alpha \leq 2\pi$; como vimos, P corresponde à extremidade final de um arco $\widehat{AP}$, de medida α radianos.



Ao projetarmos ortogonalmente esse ponto P sobre o eixo vertical, obtemos o ponto P' .

À medida algébrica do segmento $\overline{OP'}$, considerando a orientação do eixo vertical, damos o nome de **seno de α** .

Assim, podemos escrever:

$$\boxed{\text{sen } \alpha = OP'}$$

ou

$$\boxed{\text{sen } \widehat{AP} = OP'}$$

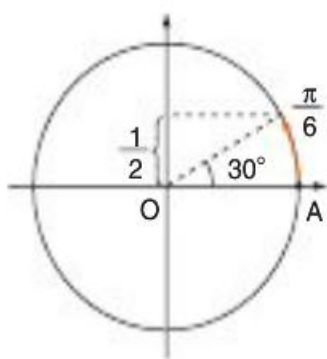
ou

$$\boxed{\text{sen } \widehat{AOP} = OP'}$$

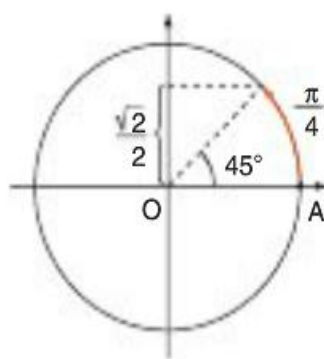
Daqui em diante, o eixo vertical será chamado eixo dos senos.

Valores notáveis

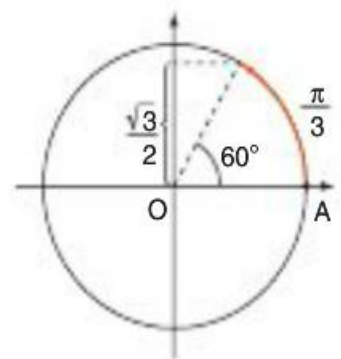
Já estamos familiarizados com o seno de alguns números reais, como $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$:



$$\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\left(\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2} \right)$$



$$\text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\left(\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$



$$\text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\left(\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Exercícios

1. Calcule o valor da seguinte expressão:

$$y = \frac{\sin 0 + \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2}}{2 \cdot \sin \frac{\pi}{6}}$$

2. Dê o valor de:

- a) $\sin \frac{3\pi}{2}$ e) $\sin 225^\circ$
 b) $\sin \pi$ f) $\sin 300^\circ$
 c) $\sin 120^\circ$ g) $\sin 2\pi$
 d) $\sin 150^\circ$ h) $\sin 330^\circ$

3. Localize os números reais $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$ na circunferência trigonométrica. Em seguida, forneça o seno de cada um deles.

4. Identifique os pares de medidas de arcos que possuem o mesmo seno:

- $\frac{2\pi}{3}$ rad $\frac{5\pi}{4}$ rad $\frac{4\pi}{3}$ rad
 $\frac{5\pi}{3}$ rad $\frac{7\pi}{4}$ rad $\frac{\pi}{3}$ rad

5. Sem consultar a tabela, compare os pares de valores seguintes:

- a) $\sin 75^\circ$ e $\sin 85^\circ$ c) $\sin 260^\circ$ e $\sin 250^\circ$
 b) $\sin 100^\circ$ e $\sin 170^\circ$ d) $\sin 300^\circ$ e $\sin 290^\circ$

6. Com auxílio da tabela do início do livro, calcule:

- a) $\sin 130^\circ$ c) $\sin 320^\circ$ e) $\sin \frac{3\pi}{5}$
 b) $\sin 230^\circ$ d) $\sin \frac{\pi}{5}$

7. Determine o sinal de:

- a) $\sin 3^\circ$ c) $\sin 5$ e) $\sin 200^\circ$
 b) $\sin 3$ d) $\sin 100^\circ$

8. Sabendo que $\sin \frac{\pi}{7} = a$, responda:

- a) $a > 0$ ou $a < 0$?
 b) qual é o valor de $\sin \frac{8\pi}{7}$, em função de a ?

9. Resolva as equações seguintes, sendo $U = [0, 2\pi[$.

- a) $\sin x = \frac{1}{2}$ c) $\sin x = -1$
 b) $\sin x = 0$ d) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

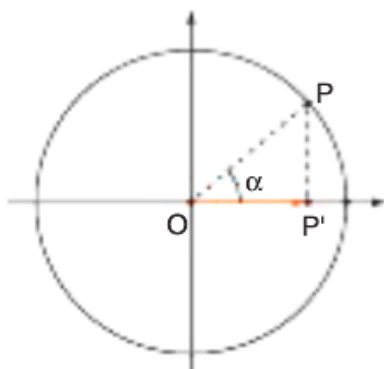
Cosseno

Seja P um ponto sobre a circunferência trigonométrica, imagem do número real α , $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Ao projetarmos ortogonalmente esse ponto P sobre o eixo horizontal, obtemos o ponto P' .

À medida algébrica do segmento $\overline{OP'}$, considerando a orientação do eixo, damos o nome de **cosseno de α** .

A partir desse momento, o eixo horizontal será chamado **eixo dos cossenos**.



$$m(\widehat{AP}) = \alpha \text{ rad}$$

$$m(\widehat{AOP}) = \alpha \text{ rad}$$

Exercícios

11. Calcule o valor de cada expressão seguinte:

a) $y = \frac{\cos 90^\circ - \cos 180^\circ}{\cos 60^\circ \cdot \cos 0^\circ + \cos 90^\circ}$

b) $x = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi \cdot \cos \frac{\pi}{6}$

12. Localize os números reais $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$ na circunferência trigonométrica. Em seguida, forneça o cosseno de cada um deles.

13. Localize os arcos $\frac{\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$ e $\frac{9\pi}{5}$. Em seguida, forneça o sinal do cosseno de cada um deles.

14. Calcule:

a) $\cos 330^\circ$

d) $\cos \pi$

g) $\cos \frac{5\pi}{3}$

b) $\cos 90^\circ$

e) $\cos \frac{3\pi}{2}$

h) $\cos 0$

c) $\cos 120^\circ$

f) $\cos \frac{5\pi}{4}$

15. Sem usar a tabela trigonométrica, compare os seguintes pares de valores:

- a) $\cos 65^\circ$ e $\cos 85^\circ$
- b) $\cos 91^\circ$ e $\cos 89^\circ$
- c) $\cos 50^\circ$ e $\cos 340^\circ$
- d) $\cos 190^\circ$ e $\cos 170^\circ$

16. Se $k \in \mathbb{N}$ e $k < 4$, quanto vale a soma dos números da forma $\cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$?

17. Sabendo que $\cos \frac{12\pi}{7} = m$, determine:

- a) o sinal de m ;
- b) o valor de $\cos \frac{9\pi}{7}$ em função de m .

18. Classifique em seu caderno como verdadeiras (V) ou falsas (F) as afirmações seguintes e corrija as falsas.

a) $\cos 90^\circ - \cos 30^\circ = \cos 60^\circ$

b) $\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\cos \frac{\pi}{3}\right)^2 = 1$

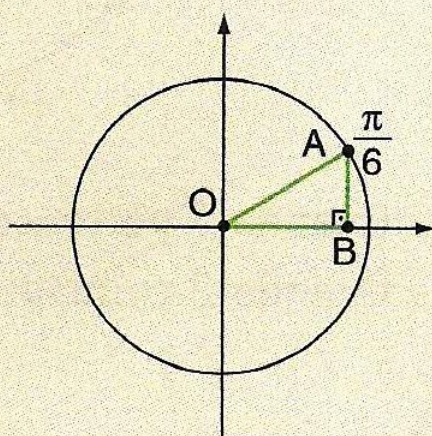
c) $\cos 2 < \cos 1$

d) $\sin 100^\circ + \cos 100^\circ < 0$

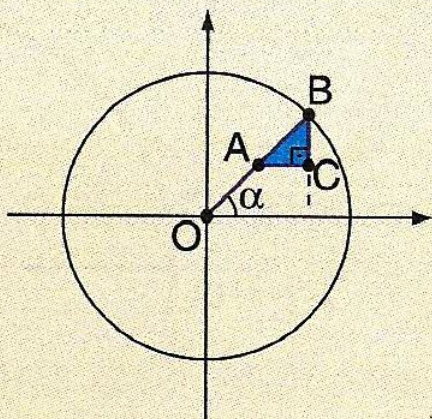
e) $\cos 6 < 0$

f) Existe um número real a , tal que $\cos a = 2$.

19. Observando a figura ao lado, encontre o perímetro e a área do triângulo OAB situado no 1º quadrante do ciclo trigonométrico.



20. No ciclo trigonométrico ao lado, A é ponto médio de OB e B é a imagem do número real α . Encontre, em função de α , a área do triângulo ABC.



21. Resolva as equações seguintes, considerando $U = [0, 2\pi[$.

a) $\cos x = 0$

c) $\cos x = 1$

e) $3 \cdot \cos x + 6 = 0$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos x = -\frac{1}{2}$

f) $4 \cdot \cos^2 x = 3$

RELAÇÕES ENTRE SENO E COSSENO

Relação Fundamental da Trigonometria

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, sendo α a medida de um dos ângulos agudos do triângulo.

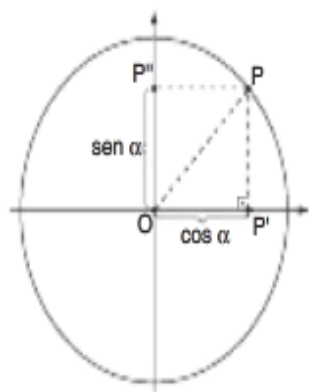
Pense nisto: $\sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2$ e $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$



Vamos agora ampliar essa relação para a circunferência trigonométrica, mostrando que ela é válida para todo número real pertencente ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Seja P a imagem de um número real $\alpha \in [0, 2\pi]$.

■ Quando P pertence ao primeiro quadrante, temos que:



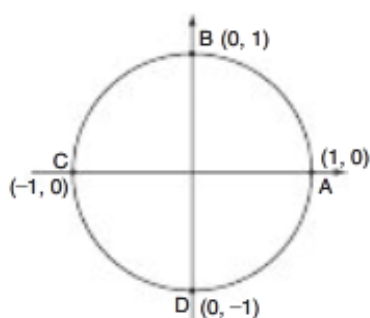
$$OP = 1; \quad OP' = \cos \alpha; \quad OP'' = \sin \alpha$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle OP'P$, vem:

$$(OP)^2 = (OP')^2 + (OP'')^2 \Rightarrow 1^2 = (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2,$$

$$\text{isto é, } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

- Quando P pertence algum outro quadrante, a demonstração é análoga.
- Quando P coincide com algum dos pontos A , B , C e D seguinte, temos:



- P coincide com $A (1, 0)$:
 $\cos \alpha = 1$ e $\sin \alpha = 0$ e $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1^2 + 0^2 = 1$
- P coincide com $B (0, 1)$:
 $\cos \alpha = 0$ e $\sin \alpha = 1$ e $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 0^2 + 1^2 = 1$
- P coincide com $C (-1, 0)$:
 $\cos \alpha = -1$ e $\sin \alpha = 0$ e $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = (-1)^2 + 0^2 = 1$
- P coincide com $D (0, -1)$:
 $\cos \alpha = 0$ e $\sin \alpha = -1$ e $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 0^2 + (-1)^2 = 1$

Logo, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Essa relação permite determinar o seno de um número real dado a partir do cosseno desse mesmo número, e vice-versa.

Exemplo:

Dado $\text{sen } x = \frac{1}{3}$, com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, para obtermos $\cos x$, usamos a relação fundamental

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\cos^2 x = \frac{8}{9}$$
$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, notamos que x está no 2º quadrante, consequentemente, $\cos x < 0$.

Assim, temos $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Exercícios

Da página do livro p. 31

23. Verifique a validade da relação fundamental para os seguintes números reais:

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{4}$

24. Sendo $\cos x = \frac{3}{5}$, com x no 4º quadrante, determine $\sin x$.

25. Um número real $\alpha \in [0, 2\pi]$ pode satisfazer simultaneamente $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ e $\cos \alpha = \frac{2}{3}$?

26. Se $\sin x = -\frac{12}{13}$, com x no 3º quadrante, determine $\cos x$.

27. Considerando a aproximação $\sin 74^\circ = \frac{24}{25}$, calcule:

a) $\cos 74^\circ$

c) $\cos 16^\circ$

e) $\cos 164^\circ$

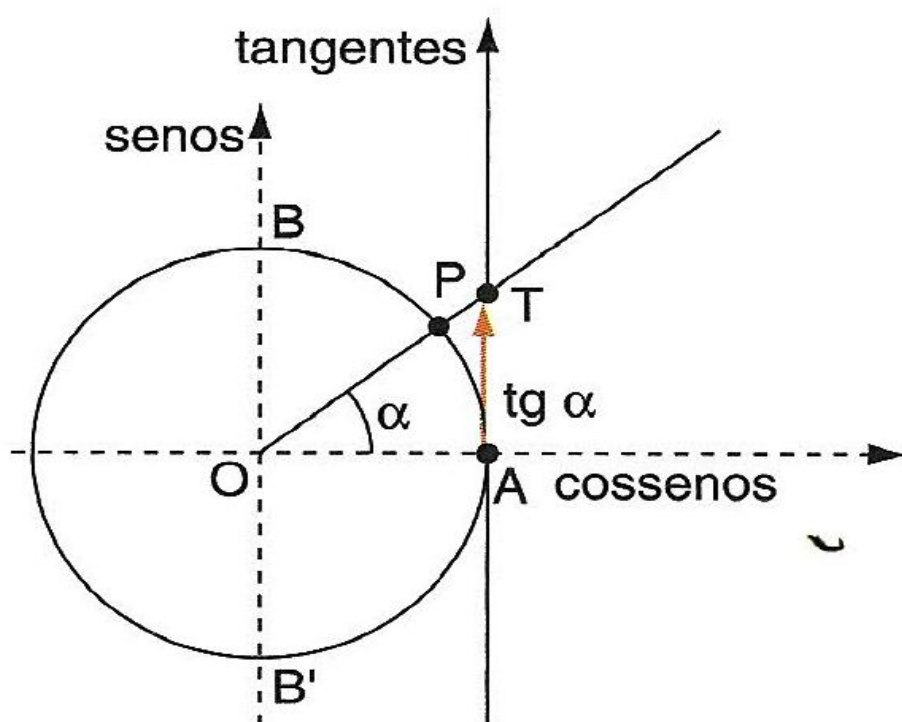
b) $\sin 16^\circ$

d) $\sin 254^\circ$

Tangente

Para estabelecer a tangente de um número real α , vamos acrescentar ao ciclo trigonométrico um terceiro eixo.

Esse eixo, denominado **eixo das tangentes**, é obtido ao se tangenciar, por uma reta vertical, o ciclo no ponto $A(1, 0)$, origem de todos os arcos. O ponto A é a origem do eixo das tangentes, e sua orientação (para cima) coincide com a do eixo dos senos.



RELAÇÃO ENTRE TANGENTE, SENO E COSENO

$$tg \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

COTANGENTE

$$cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$$

SECANTE

$$sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

COSSECANTE

$$cossec \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

EXERCÍCIOS

1. Calcule se existir:

- a) $tg\ 120^\circ$ c) $tg\ 210^\circ$ e) $tg\ 240^\circ$ g) $tg\ 0$
b) $tg\ 180^\circ$ d) $tg\ 90^\circ$ f) $tg\ \frac{3\pi}{2}$ h) $tg\ \frac{5\pi}{3}$

2. Sendo $x = 30^\circ$, calcule o valor da expressão:

$$y = \frac{2 \cdot \operatorname{sen} x - 4 \cdot \cos x + tg\ 2x}{\cos 4x - \operatorname{sen} 2x}$$

3. Calcule o valor da cotangente, secante e cossecante de:

- a) 180° b) 0° c) 30° d) 90° e) 45° f) 60° g) 270° h) 360° i) 1935°

4. Verificar se a **tg x** e a **cotg x** é maior do que zero, menor do que zero, igual a zero ou não é definida nos seguintes casos:

- a) 95° b) 190° c) 720° d) 90° e) -140° f) $\frac{7\pi}{6}$ g) $\frac{3\pi}{2}$ h) $\frac{25\pi}{9}$

5. Sabendo que $\operatorname{sen} \theta = -\frac{3}{5}$ e $\cos \theta = \frac{4}{5}$, responda:

- a) Qual o quadrante de θ ?
b) Qual o valor da $tg\ \theta$?
c) Qual o valor da $\cotg\ \theta$?
d) Qual o valor da $\sec\ \theta$?
e) Qual o valor da $\operatorname{cossec}\ \theta$?

6. Considere as funções **f**, **g** e **h** definidas por:

- $f(x) = \operatorname{sen} 4x$
- $g(x) = 1 - \cos x$
- $h(x) = 3 \cdot tg\ x$

Determine:

- a) $f(\pi/2)$
b) $g(\pi)$
c) $h(\pi/6)$

7. Considerando a aproximação $tg 22^\circ = 0,4$; obtenha os valores de:

- a) $tg\ 158^\circ$ c) $tg\ 338^\circ$
b) $tg\ 202^\circ$

8. Sabendo que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$ e $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, determine o valor de $tg\ \alpha$?

9. Se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ e $\cos \alpha = 0,2$, qual é o valor da $tg\ \alpha$?

10. Se $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ e $\operatorname{tg} x = -4$, obtenha o valor de:

a) $\operatorname{sen} x$ b) $\cos x$

11. Considerando a aproximação $\operatorname{tg} 58^\circ = \frac{8}{5}$, determine o valor de:

a) $\operatorname{sen} 58^\circ$ b) $\operatorname{sen} 32^\circ$ c) $\operatorname{tg} 302^\circ$ d) $\operatorname{tg} 122^\circ$

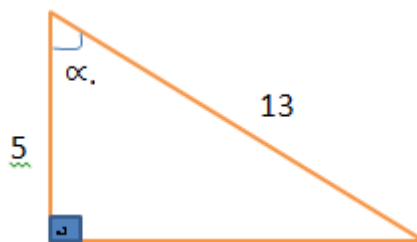
12. Calcule o valor de:

a) $\sec \frac{\pi}{6}$ c) $\operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6}$ e) $\operatorname{cosec} 315^\circ$
b) $\operatorname{cotg} \frac{2\pi}{3}$ d) $\sec 210^\circ$ f) $\operatorname{cotg} 45^\circ$

13. Sabendo que $\sec x = \frac{5}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, obtenha as demais razões trigonométricas de x .

14. Sendo $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule o valor de $y = \operatorname{cotg} x - \sec x$

15. Determine $\operatorname{cotg} \alpha$.



P/ 
* Pesquisar e trazer p/ sala
tudo sobre racionalização
digitalizado e/ cabeçalho
e as devidas informações
P/ Quarta-feira
1.º ponto