ESCOLA ESTADUAL FREDERICO JOSÉ PEDREIRA NETO		Turma: 23.____	VALOR: 3,0 pontos Data: ____/____/2017
PROFESSOR: MARCUS SALES	ALUNO (A):		

Unidades de medidas de arcos e ângulos

Ao tratarmos da medida de um arco, adotamos o grau (°) ou radiano (rad).

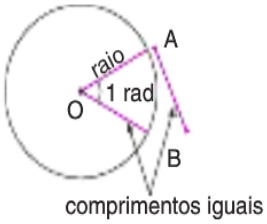
- **1 grau** é igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência na qual se encontra o arco a ser medido.

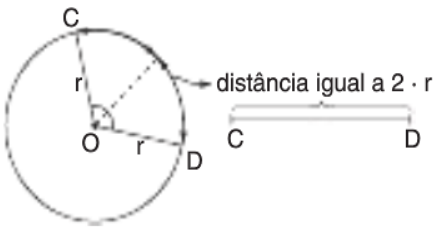
Como sabemos, o grau possui submúltiplos importantes, como o **minuto** e o **segundo**.

O arco de 1 minuto (indica-se 1') corresponde a $\frac{1}{60}$ do arco de medida 1°; o arco de 1 segundo (indica-se 1") corresponde a $\frac{1}{60}$ do arco de medida 1'.

- **1 radiano** é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência na qual se encontra o arco a ser medido.

O arco $\overline{AB}$, bem como seu ângulo correspondente $A\hat{O}B$, mede 1 rad. Já o arco $\overline{CD}$ mede 2 rad, pois seu comprimento é igual ao dobro da medida do raio.





Como sabemos, o comprimento C de uma circunferência de raio r é igual a $2\pi r$. Isso significa que o raio "cabe" 2π vezes nesse comprimento (aproximadamente 6,28 vezes). Desse modo, como um arco de comprimento igual a r mede 1 rad, um arco de comprimento $2\pi r$ (volta completa) mede 2π rad. Daí concluímos que as medidas de 2π rad e 360° são equivalentes.

Observe as seguintes relações no quadro ao lado.

2π rad	360°
π rad	180°
$\frac{\pi}{2}$ rad	90°
$\frac{\pi}{3}$ rad	60°
$\frac{\pi}{4}$ rad	45°
⋮	⋮

Exercícios

1. Transformar a medida de um arco de 30° (ou ângulo de 30°) em radianos.

2. Transformar a medida de um arco de $\frac{\pi}{4}$ rad (ou um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ rad) em graus.

3. Quanto mede, em graus, um arco de 1 radiano?

Soluções:

1. **Solução:**

Podemos estabelecer a regra de três simples:

$$\begin{cases} \pi \text{ rad} & \text{——} & 180° \\ x & \text{——} & 30° \end{cases}$$

Daí, $x = \dfrac{30° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ rad.

Pense nisto: Como 30° correspondem à 6ª parte de 180°, temos, em radianos, a medida de $\frac{\pi}{6}$.

2. **Solução:**

Devemos estabelecer a regra de três simples:

$$\begin{cases} \pi \text{ rad} & \text{——} & 180° \\ \frac{\pi}{4} \text{ rad} & \text{——} & x \end{cases}$$

Assim, $x = \dfrac{\frac{\pi}{4} \text{ rad} \cdot 180°}{\pi \text{ rad}}$ e $x = 45°$.

Pense nisto: Como a π rad correspondem 180°, a $\frac{\pi}{4}$ rad equivalem $\frac{180°}{4} = 45°$.

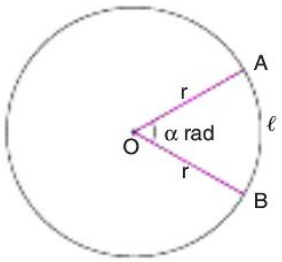
3. **Solução:**

Como a π rad (ou 3,14 rad, aproximadamente) correspondem 180°, podemos fazer:

$$\begin{cases} 3{,}14 \text{ rad} — 180° \\ 1 \text{ rad} — x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{180°}{3{,}14} \Rightarrow x \cong 57{,}3° = 57°18'$$

Pense nisto: 57,3° equivalem a 57°18'.

O comprimento de um arco



$$\alpha = \frac{\ell}{r}$$

Sendo $\begin{cases} \alpha: \text{medida de um arco em radianos} \\ \ell: \text{comprimento do arco.} \\ r: \text{medida do raio da circunferência.} \end{cases}$

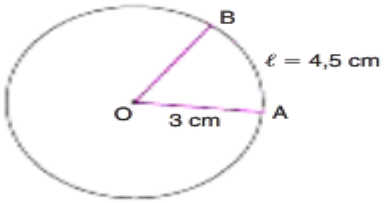
Pense nisto: α é o "número de vezes que o raio cabe no arco retificado".

Exercícios

4. Quanto mede, em radianos, o arco $\overset{\frown}{AB}$, contido em uma circunferência de raio 3 cm, cujo comprimento é 4,5 cm?

Solução:

Podemos fazer:



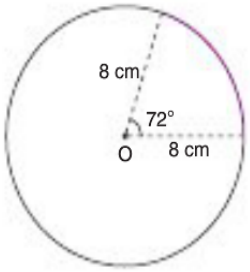
$$\alpha = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5 \text{ rad}$$

Uma solução equivalente consiste em usar a própria definição de radiano:

medida do arco		comprimento do arco
1 rad	——	3 cm
x	——	4,5 cm

$\Rightarrow x = 1{,}5$ rad

5. Qual é o comprimento de um arco de 72° sobre uma circunferência de raio 8 cm?



1ª solução:

- O comprimento da circunferência é $c = 2 \cdot \pi \cdot 8 = 16\pi$ cm.

  Podemos fazer:

  $\begin{cases} 16\pi \text{ cm} — 360° \\ x \quad — 72° \end{cases} \Rightarrow x = \frac{16\pi}{5}$ cm (ou 10,048 cm, aproximadamente).

  Observe que $\frac{360°}{72°} = 5$; assim, o comprimento do arco corresponde à quinta parte do comprimento da circunferência correspondente.

2ª solução:

- Expressamos 72° em radianos: $\begin{cases} 180° — \pi \text{ rad} \\ 72° — x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{5}$ rad.

  Daí, usamos a relação $\alpha = \frac{\ell}{r} \Rightarrow \frac{2\pi}{5} = \frac{\ell}{8} \Rightarrow \ell = \frac{16\pi}{5}$ cm

6. Determine a medida do menor ângulo α formado entre os ponteiros de um relógio ao marcar 2h40 min.

Solução:

O ângulo pedido mede α.

Observe que, entre duas marcas consecutivas de horas, forma-se um arco cujo ângulo central tem medida $\frac{360°}{12°} = 30°$. Assim, $\alpha = 6 \cdot 30° - x = 180° - x$.

Em 1 hora (60 minutos), o ponteiro das horas percorre um arco de medida 30°.

Para calcular a medida *x* do ângulo percorrido pelo ponteiro das horas em 40 minutos, podemos estabelecer a relação:

$\begin{cases} 60 \text{ minutos} — 30° \\ 40 \text{ minutos} — x \end{cases} \Rightarrow x = 20°$

Assim: $\alpha = 180° - 20° = 160°$.

Exercícios

1. Expresse em radianos:

a) 30°
b) 15°
c) 120°
d) 210°
e) 270°
f) 300°
g) 20°
h) 150°
i) 315°

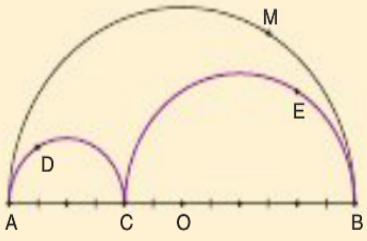
2. Expresse em graus:

a) $\frac{\pi}{3}$ rad
b) $\frac{\pi}{2}$ rad
c) $\frac{\pi}{4}$ rad
d) $\frac{\pi}{5}$ rad
e) 0,5 rad
f) $\frac{3\pi}{4}$ rad
g) $\frac{2\pi}{9}$ rad
h) $\frac{11\pi}{6}$ rad
i) 3 rad

3. Uma semicircunferência tem comprimento 188,4 m. Quanto mede seu raio? Use a aproximação $\pi = 3,14$.

4. Calcule o comprimento de um arco $\overset{\frown}{AB}$ definido em uma circunferência de raio 8 cm por um ângulo central AÔB de 120°.

5. Considerando que, na figura abaixo, $\overline{AB}$ está dividido em 12 partes iguais, qual o percurso mais curto sobre as semicircunferências: AMB ou ADCEB?



6. Marque, no ciclo trigonométrico, os pontos correspondentes aos seguintes números reais: $0, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

7. Agrupe, por quadrante, os pontos correspondentes aos seguintes números reais: $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, 2, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{5}, \frac{5\pi}{9}, \frac{4}{3}, \frac{7\pi}{12}, \sqrt{7}, \frac{15\pi}{8}, \frac{15\pi}{11}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}$ e 5.

8. Um automóvel percorre 157 m em uma pista circular, descrevendo um arco de 72°. Determine o raio da curva. Use a aproximação $\pi = 3{,}14$.

ALEX ARGOZINO

Simetrias

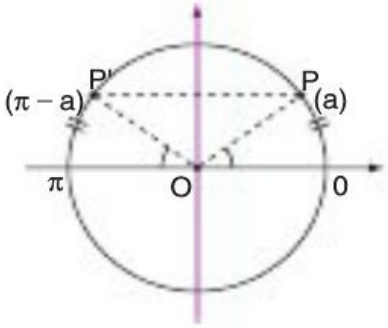
No ciclo trigonométrico, interessam-nos diretamente três tipos de simetrias: em relação ao eixo vertical, em relação ao eixo horizontal e em relação ao centro.

Para o estudo de cada uma delas, tomaremos um arco de medida a radianos, do 1º quadrante, correspondente ao número real a.

■ Simetria em relação ao eixo vertical

Seja P a imagem do número real a.

O simétrico de P em relação ao eixo vertical é o ponto P', imagem do número real $\pi - a$, visto que os ângulos centrais assinalados na figura são congruentes.



2ª SÉRIE — Resolução Atividades P. 14

② e) 0,5 rad

$180° \longrightarrow 3{,}14\ rad \Rightarrow x \cong 28{,}66°$

$x \longrightarrow 0{,}5\ rad$

i) 3 rad

$3{,}14\ rad \longrightarrow 180° \Rightarrow x \cong 172°$

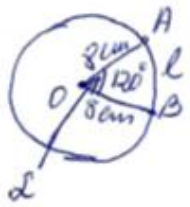
$3\ rad \longrightarrow x$

③ $C = \dfrac{2\pi r}{2}$ $\quad 188{,}4 = \dfrac{2\pi r}{2} \Rightarrow 3{,}14\,r = 188{,}4 \Rightarrow r = \dfrac{188{,}4}{3{,}14}$

$r = 60\ mm$

$C = 188{,}4$

④ $r = 8\ cm$, $A\hat{O}B = 120°$



$\alpha = \dfrac{\ell}{r}$ sabendo que $120° = \dfrac{2\pi}{3}$ temos:

$\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\ell}{8} \Rightarrow \ell = \dfrac{16\pi}{3}\ cm$

⑧ $\pi \text{ — } 180°$

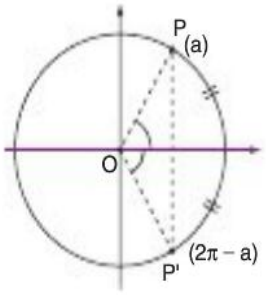
$x \text{ — } 72° \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{5}$

$\alpha = \dfrac{\ell}{r} \Rightarrow r = \dfrac{\ell}{\alpha}$

$r = \dfrac{157}{\frac{2\pi}{5}} = 157 \cdot \dfrac{5}{2 \cdot 3{,}14} \Rightarrow 125\ m$

■ Simetria em relação ao eixo horizontal

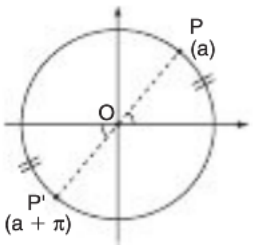
Levando em conta a congruência entre os ângulos centrais assinalados na figura, podemos afirmar que o número real que possui imagem simétrica à imagem de a é o número 2π − a.



Pense nisto: Os dois triângulos dessa figura são congruentes.

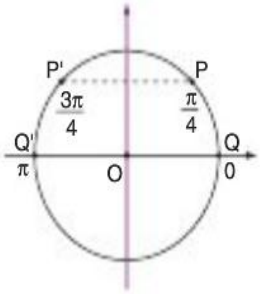
Simetria em relação ao centro do ciclo

Quando dois pontos são extremidades opostas de um diâmetro, como P e P' da figura, a diferença entre os números correspondentes vale π.



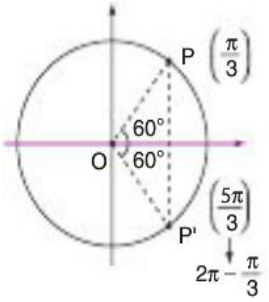
Exemplo 2

Os pontos P e P', imagens dos números reais $\frac{\pi}{4}$ e $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, respectivamente, são simétricos em relação ao eixo vertical. O mesmo ocorre com Q e Q', imagens de 0 e π, respectivamente.



Exemplo 3

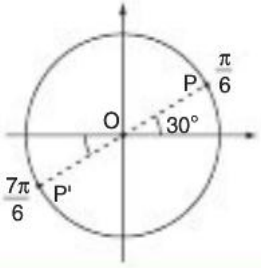
Em relação ao eixo horizontal, são simétricos os pontos P e P' (note a congruência entre os ângulos assinalados).



Exemplo 4

Os pontos correspondentes aos números reais $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ são simétricos (os ângulos assinalados são opostos pelo vértice):

$$\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} = \pi$$



Exercícios

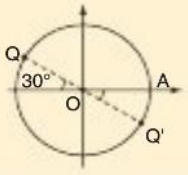
20. Marque, no ciclo trigonométrico, os pontos correspondentes aos números $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$. Cite a simetria, se houver.

21. Proceda da mesma forma que no exercício anterior para:

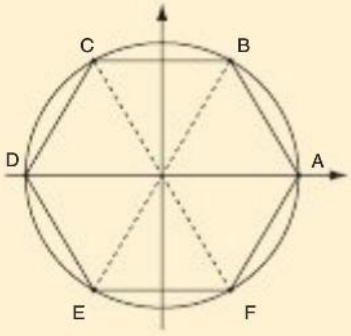
a) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{8}$ e $\frac{9\pi}{8}$

b) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$

22. Na circunferência trigonométrica ao lado, os pontos Q e Q' são imagens dos números reais a e b, respectivamente, com a e b pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi[$. Determine a e b.



23. Na figura, o hexágono regular ABCDEF está inscrito na circunferência trigonométrica. O vértice A é imagem do número real zero.



Determine a quais números reais pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi[$ correspondem os demais vértices.

Respostas dos exercícios anteriores:

5. Seja u a distância entre duas marcações sucessivas. Temos:

$$\overset{\frown}{AMB} = \frac{1}{2} . 2\pi . 6u = 6\pi u$$

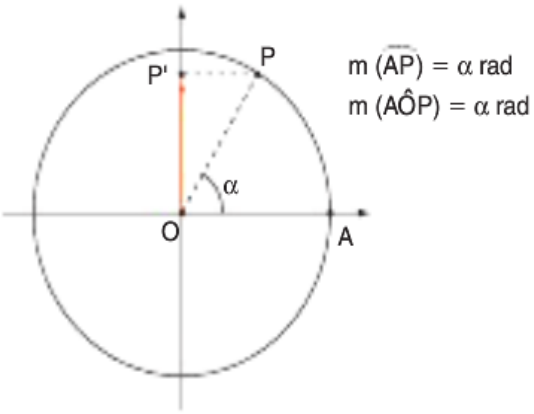
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{ADC} = \frac{1}{2} . 2\pi . 2u = 2\pi u \\ \overset{\frown}{CEB} = \frac{1}{2} . 2\pi . 4u = 4\pi u \end{array}\right\} O\ caminho\ ADCEB\ tem\ comprimento\ 2\pi u + 4\pi u = 6\pi u$$

Assim, temos que ambos têm o mesmo comprimento.

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

SENO

Seja P um ponto da circunferência trigonométrica, imagem de um número real α, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$; como vimos, P corresponde à extremidade final de um arco $\overline{AP}$, de medida α radianos.



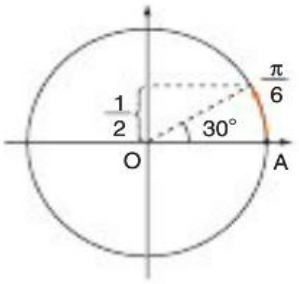
Ao projetarmos ortogonalmente esse ponto P sobre o eixo vertical, obtemos o ponto P'.
À medida algébrica do segmento $\overline{OP'}$, considerando a orientação do eixo vertical, damos o nome de **seno de α**.
Assim, podemos escrever:

$\text{sen}\ \alpha = OP'$ ou $\text{sen}\ \overline{AP} = OP'$ ou $\text{sen}\ A\hat{O}P = OP'$

Daqui em diante, o eixo vertical será chamado eixo dos senos.

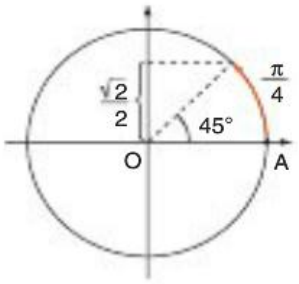
Valores notáveis

Já estamos familiarizados com o seno de alguns números reais, como $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$:



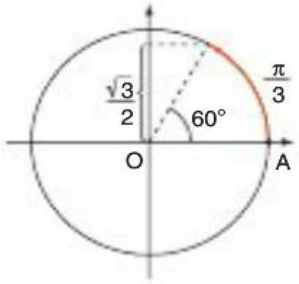
$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\left(\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}\right)$



$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\left(\operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\left(\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Exercícios

1. Calcule o valor da seguinte expressão:

$$y = \frac{\operatorname{sen} 0 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}}{2 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}$$

2. Dê o valor de:

a) $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$
b) $\operatorname{sen}\pi$
c) $\operatorname{sen} 120°$
d) $\operatorname{sen} 150°$
e) $\operatorname{sen} 225°$
f) $\operatorname{sen} 300°$
g) $\operatorname{sen} 2\pi$
h) $\operatorname{sen} 330°$

3. Localize os números reais $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$ na circunferência trigonométrica. Em seguida, forneça o seno de cada um deles.

4. Identifique os pares de medidas de arcos que possuem o mesmo seno:

$\frac{2\pi}{3}$ rad $\quad \frac{5\pi}{4}$ rad $\quad \frac{4\pi}{3}$ rad

$\frac{5\pi}{3}$ rad $\quad \frac{7\pi}{4}$ rad $\quad \frac{\pi}{3}$ rad

5. Sem consultar a tabela, compare os pares de valores seguintes:

a) sen 75° e sen 85°
b) sen 100° e sen 170°
c) sen 260° e sen 250°
d) sen 300° e sen 290°

6. Com auxílio da tabela do início do livro, calcule:

a) sen 130°
b) sen 230°
c) sen 320°
d) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$
e) $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{5}$

7. Determine o sinal de:

a) sen 3°
b) sen 3
c) sen 5
d) sen 100°
e) sen 200°

8. Sabendo que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} = a$, responda:

a) $a > 0$ ou $a < 0$?

b) qual é o valor de $\operatorname{sen}\frac{8\pi}{7}$, em função de a?

9. Resolva as equações seguintes, sendo $U = [0, 2\pi[$.

a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$
b) $\operatorname{sen} x = 0$
c) $\operatorname{sen} x = -1$
d) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

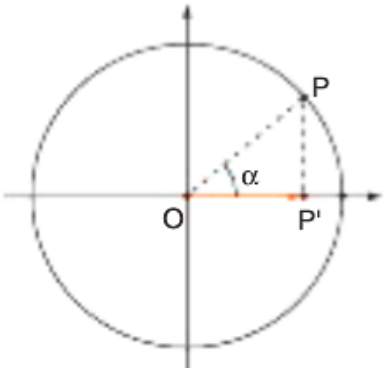
Cosseno

Seja P um ponto sobre a circunferência trigonométrica, imagem do número real α, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Ao projetarmos ortogonalmente esse ponto P sobre o eixo horizontal, obtemos o ponto P'.

À medida algébrica do segmento $\overline{OP'}$, considerando a orientação do eixo, damos o nome de **cosseno de α**.

A partir desse momento, o eixo horizontal será chamado **eixo dos cossenos**.



m $(\overset{\frown}{AP}) = \alpha$ rad

m $(A\hat{O}P) = \alpha$ rad

Exercícios

11. Calcule o valor de cada expressão seguinte:

a) $y = \dfrac{\cos 90° - \cos 180°}{\cos 60° \cdot \cos 0° + \cos 90°}$

b) $x = \cos \dfrac{\pi}{4} \cdot \cos \dfrac{\pi}{2} + \cos \pi \cdot \cos \dfrac{\pi}{6}$

12. Localize os números reais $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$, $\dfrac{7\pi}{6}$ e $\dfrac{11\pi}{6}$ na circunferência trigonométrica. Em seguida, forneça

18. Classifique em seu caderno como verdadeiras (V) ou falsas (F) as afirmações seguintes e corrija as falsas.

a) $\cos 90° - \cos 30° = \cos 60°$

b) $\left(\text{sen}\,\dfrac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\cos \dfrac{\pi}{3}\right)^2 = 1$

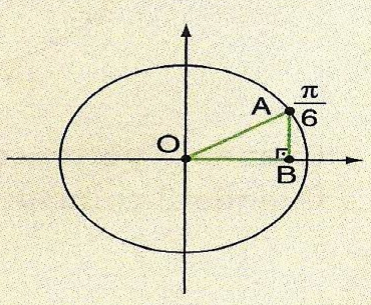
c) $\cos 2 < \cos 1$

d) $\text{sen}\ 100° + \cos 100° < 0$

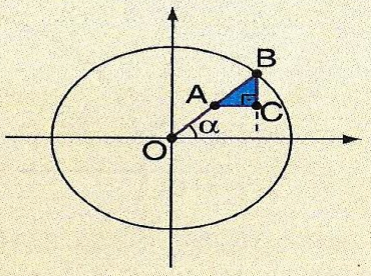
e) $\cos 6 < 0$

f) Existe um número real *a*, tal que $\cos a = 2$.

19. Observando a figura ao lado, encontre o perímetro e a área do triângulo OAB situado no 1º quadrante do ciclo trigonométrico.



20. No ciclo trigonométrico ao lado, A é ponto médio de $\overline{OB}$ e B é a imagem do número real α. Encontre, em função de α, a área do triângulo ABC.



21. Resolva as equações seguintes, considerando $U = [0, 2\pi[$.

a) $\cos x = 0$ c) $\cos x = 1$ e) $3 \cdot \cos x + 6 = 0$

b) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ f) $4 \cdot \cos^2 x = 3$

Relações entre seno e cosseno

Relação fundamental da trigonometria

Do estudo da trigonometria no triângulo retângulo, temos a relação fundamental da

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$, sendo α a medida de um dos ângulos agudos do triâ

Pense nisto: $\text{sen}^2\,\alpha = (\text{sen}\,\alpha)^2$ e $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$

Seja $x \in \mathbb{R}$, com $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

No ciclo trigonométrico a notamos que os triângulos retângulos destacados são congruentes. Daí, vem:

do arco de medida x radiano

$PP' = QQ' \Rightarrow \text{sen}\,x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e $OP' = OQ' \Rightarrow \cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Essa relação pode ser estendida para qualquer arco de medida x, $0 \leq x \leq 2\pi$:

$$\text{sen}\,x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{e} \quad \cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

senos

Temos:

$$\begin{cases} OP' = \cos x \text{ e } PP' = \text{sen}\,x \\ QQ' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ e } OQ' = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases}$$

Observando que:

$m(P\hat{O}P') = m(Q\hat{O}Q')$

$OP = OQ = 1$ (medida do raio)

Exemplo: Dado $\text{sen}\,x = \frac{1}{3}$, com

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$, para obtermos cos x, usamos a relação fundamental

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + cos^2 = 1$$

$$cos^2 x = 1 - \frac{1}{9}$$

$$cos^2 = \frac{8}{9}$$

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, notamos que x está no 2º quadrante, consequentemente, cos x < 0. Assim, temos $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Exercícios

23. Verifique a validade da relação fundamental para os seguintes números reais:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{4}$

24. Sendo cos $x = \frac{3}{5}$, com x no 4º quadrante, determine sen x.

25. Um número real $\alpha \in [0, 2\pi]$ pode satisfazer simultaneamente sen $\alpha = \frac{1}{3}$ e cos $\alpha = \frac{2}{3}$?

26. Se sen $x = -\frac{12}{13}$, com x no 3º quadrante, determine cos x.

27. Considerando a aproximação sen $74° = \frac{24}{25}$, calcule:

a) cos 74° c) cos 16° e) cos 164°

b) sen 16° d) sen 254°