ESCOLA ESTADUAL FREDERICO JOSÉ PEDREIRA NETO	Turma: _____	VALOR:
		Data: ____/____/____
PROFESSOR:	ALUNO (A):	

MATRIZES E DETERMINANTES

TIPOS DE MATRIZES

MATRIZ QUADRADA

È aquela que o número de linhas é igual ao número de colunas

Ex.:

1°) $A = \begin{bmatrix} -5 \end{bmatrix}_{1X1}$

2°) $B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{7} \\ -9 & 1 \end{bmatrix}_{2x2}$

3°) $C = \begin{bmatrix} 0 & 8 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \\ \frac{8}{3} & \sqrt{5} & -2 \end{bmatrix}_{3x3}$

Diagonal principal e diagonal secundária de uma matriz quadrada

Ex.: $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 0 & 7 & -9 \\ 5 & -1 & 9 \end{bmatrix}$

Diagonal secundária Diagonal principal

MATRIZ LINHA

È aquela que possui apenas uma linha.

Ex.:

1°) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ matriz linha 1X4

2°) $B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ matriz linha 1X3

MATRIZ COLUNA

È aquela que possui apenas uma coluna

1°) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ matriz coluna 3x1

2°) $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ matriz coluna 2x1

MATRIZ NULA

A matriz é nula se e somente se todos os seus elementos são iguais a zero ($a_{ij} = 0$)

Ex.: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

MATRIZ TRANSPOSTA

Dada uma A**m x n**, a matriz transposta de A (indica-se $\mathbf{A^t}$) é aquela **nxm** que se obtém trocando **ordenadamente** suas linhas por colunas ou suas colunas por linhas.

Ex.:

1°) Sendo $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}_{3x2}$, então $A^t = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ -5 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{2x3}$

MATRIZ OPOSTA

Chama-se **oposta** de uma matriz A, a matriz **– A** que se obtém trocando o sinal de todos os elementos de A.

Ex.: A oposta de $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ é $-A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

MATRIZ IDENTIDADE

A matriz quadrada de ordem **n** onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os outros elementos são iguais a zero, chama-se **matriz identidade**.

Ex.: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

OPERAÇÕES COM MATRIZES

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

EXEMPLOS:

1°) Sendo $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 10 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, então

$$A + B = \begin{bmatrix} 4+7 & 5+(-1) & 7+10 \\ 2+3 & -1+(-3) & 0+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 17 \\ 5 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

2°)

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 1 & -10 \\ -3 & 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+(-7) & 5+1 & 7+(-10) \\ 2+(-3) & (-1)+3 & 0+(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

MULIPLICAÇÃO DE UMA MATRIZ POR UM NÚMERO REAL

Ex.: $7 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.4 & 7.(-6) \\ 7.0 & 7.\left(\frac{1}{7}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & -42 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Ex.:

1°) Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}_{3x2}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}_{2x2}$, calcule A . B:

$$\text{A . B} = \begin{bmatrix} 3.2+1.4 & 3.5+1.7 \\ 2.2+5.4 & 2.5+5.7 \\ 4.2+7.4 & 4.5+7.7 \end{bmatrix} \Rightarrow A.B = \begin{bmatrix} 10 & 22 \\ 24 & 45 \\ 36 & 69 \end{bmatrix}_{3\ x\ 2}$$

2°) $(1 \quad 7)_{1x2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 9 & 5 & 2 \end{pmatrix}_{2x3} = (1.3+7.9 \quad 1.4+7.5 \quad 1.8+7.2) = (66 \quad 39 \quad 22)_{1x3}$

DETERMINANTES

A qualquer matriz quadrada de ordem n, podemos associar um único número chamado determinante da matriz.

O determinantes devem ser representados por barras verticais.

CÁLCULO DO DETERMINANTE DE UMA MATRIZ DE 1ª ORDEM

A = $[a_{11}] \Rightarrow \det A = |a_{11}| = a_{11}$

Ex.: A = $[5] \Rightarrow \det A = |5| = 5$

CÁLCULO DO DETERMINANTE DE UMA MATRIZ DE 2ª ORDEM

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- +

Ex.: Dada a matriz A = $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ determine o determinante de A.

det A = $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ = (– 2) . 2 – 3 . 4 = – 4 – 12 = – 16

CALCULO DO DETERMINANTE DE UMA MATRIZ DE 3ª ORDEM

(regra de SARRUS)

- Acrescentar as 2 primeiras colunas à direita da 3ª
- Adicionar os produtos dos elementos da diagonal principal e das diagonais paralelas
- Subtrair os produtos dos elementos da diagonal secundária e das diagonais paralelas

A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

det A = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

– – – + + +

Ex.: Dada a matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ calcule o determinante da matriz A.

det A = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 2 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ = (– 8 – 4 + 30) – (– 24 + 2 – 10) = 18 – (– 32) = 18 + 32

=

-24 2 -10 -8 -4 30 = 50

Obs: Faça os exercícios propostos.

ATIVIDADES

1) Escreva na forma de tabela as seguintes matrizes:

a) A = (a_{ij}) $_{3x1}$, sendo a_{ij} = i . j

b) B = (b_{ij})$_{2x2}$, sendo b_{ij} = 2i – j

2) Construa a matriz real quadrada A de ordem 3, definida por:

a_{ij} = $\begin{cases} 2i + j \text{ se } i < j \\ i^2 - j + 1 \text{ se } i \geq j \end{cases}$

3) Seja a matriz A = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 & 12 \\ 3 & 6 & 3 & 13 \\ 4 & 8 & 0 & 14 \\ 5 & 9 & 5 & 15 \end{bmatrix}$

a) Qual é a ordem de **A** ?

b) Escreva o elemento $\mathbf{a_{52}}$

c) Escreva a sua transposta.

d) Para que valores de **i** tem-se $\mathbf{a_{ij} = 0}$?

4) Calcule **x** e **y** , sabendo que :

$$\begin{bmatrix} x^2 & y^3 \\ x^2 & y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x & -y \\ 4x & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

5) Determine a matriz oposta das seguintes matrizes:

a) A = $\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) B = $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ c) C = $\begin{bmatrix} 5 & -\frac{1}{4} \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

6) Dadas as matrizes A = $\lfloor a_{ij} \rfloor_{2x2}$, sendo $a_{ij} = i^j$ e B = $\lfloor b_{ij} \rfloor_{2x2}$ sendo $b_{ij} = j^i$, determine :

a) $a_{11} + b_{11}$ c) $a_{21} \cdot b_{21}$

b) $a_{12} - b_{21}$ d) $a_{22}(b_{11} + b_{22})$

7) Calcule $\sum_{i=1}^{10}(i^2 - 20)$

8) Das as matrizes A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, determine:

a) A + B b) B – C c) 2A + B d) A – 3B + C e) – 4A + 3B + 2C

6) Efetue:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} (2 \quad 4 \quad -1)$

7) Dadas as matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, calcule :

a) A^2 c) $A^2 \cdot B$

b) A^3 d) $B^2 \cdot A$

8) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, calcule $A^2 + 2A - 11 \cdot I$, onde $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$