ESCOLA ESTADUAL FREDERICO JOSÉ PEDREIRA NETO	Turma: ______	VALOR: Data: ____/____/____
PROFESSOR: Marcus Sales	ALUNO (A):	

Conceitos sobre conjuntos

Introdução

CONJUNTO: designado, em geral, por uma letra maiúscula (A,B,C, . . . , X,Y,Z)
ELEMENTOS: designado, em geral, por uma letra minúscula (a,b,c,. . . , x,y,z)
PERTINÊNCIA: a relação entre elemento e conjunto, denotada pelo símbolo ∈, que se lê: "pertence a".

Exemplo:

Se A é o conjunto das cores da bandeira do Brasil, sendo *v* (verde), *a* (amarelo), *z* (azul) e *b* (branco), podemos fala que v, a, z, b são elementos de *A*, o qual pode ser representado entre **CHAVES**, como segue:

$A = \{v, a\ , z\ , b\ \}$ (enumerando os elementos)

Onde, dizemos que: $v \in A$, $a \in A$, $z \in A$ e $b \in A$

OBSERVAÇÃO:

- Os símbolos $\notin$ e $\neq$ são usados para expressar as negativas de $\in$ e $=$, respetivamente.
- No exemplo acima temos que: $v \neq a\ , v \neq z\ , v \neq b\ , a \neq z\ , a \neq b, b \neq z$ e, se designarmos a cor preta p, temos que $p \notin A$.
- Podemos escrever também podendo designar por propriedade característica dos elementos. $A = \{x/x \text{ é } cor\ da\ bandeira\ do\ Brasil\}$

- **CONJUNTO UNITÁRIO:** Há apenas um único elemento no conjunto
  Exemplo: $A = \{5\}$ $B = \{x/x \text{ é } a\ capital\ da\ França\}$
- **CONJUNTO VAZIO:** Não possui elementos dentro do conjunto.
  Exemplo:
  $C = \{cidades\ do\ Estado\ de\ Goiás\ banhadas\ pelo\ Oceano\ atlantico\} = \emptyset$
  $D = \{x/x \neq x\} = \emptyset$

EXEMPLOS:

1 Indique se cada um dos elementos -4; $\frac{1}{3}$; 3 e 0,25 pertence ou não a cada um destes conjuntos:

$A = \{x \mid x \text{ é um número inteiro}\}$

$B = \{x \mid x < 1\}$

$C = \{x \mid 15x - 5 = 0\}$

$D = \left\{x \;\middle|\; -2 \leq x \leq \frac{1}{4}\right\}$

2 Considerando que F = {x | x é estado do Sudeste brasileiro} e G = {x | x é capital de um país sul-americano}, quais das sentenças seguintes são verdadeiras?

a) Rio de Janeiro $\in$ F

b) México $\in$ G

c) Lima $\notin$ G

d) Montevidéu $\in$ G

e) Espírito Santo $\notin$ F

f) São Paulo $\in$ F

Subconjuntos – relação de inclusão

Consideremos os conjuntos A = {x | x é letra da palavra "ralar"} e B = {x | x é letra da palavra "algazarra"}; ou seja:

A = {r, a, l} e B = {a, l, g, z, r}

Note que todo elemento de **A** é também elemento de **B**. Nesse caso, dizemos que **A** é um **subconjunto** ou uma **parte** de **B**, o que é indicado por:

A $\subset$ B (lê-se: **A** está contido em **B**, ou **A** é um subconjunto de **B**, ou **A** é uma parte de **B**),

ou, ainda:

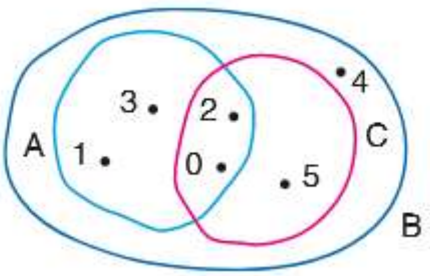
B $\supset$ A (lê-se: **B** contém **A**)

De modo geral, temos:

A $\subset$ B se todo elemento de **A** também é elemento de **B**.

EXEMPLO 1

Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3}, B = {0, 1, 2, 3, 4, 5} e C = {0, 2, 5}, temos:



a) **A**_____**B**

b) **B** _____**C**

c) **C** ______**A**

d) **B** _______**A**

e) **C** ______**B**

3 Em cada caso, reescreva o conjunto dado enumerando seus elementos:

A = {x | x é letra da palavra "beterraba"}

B = {x | x é nome de um estado brasileiro cuja letra inicial é p}

$C = \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{a}{b}, \text{ em que a e b são números inteiros, } a \neq b,\ 1 < a < 4 \text{ e } 1 < b < 4 \right\}$

CONJUNTOS NUMÉRICOS

O Conjunto dos Números Naturais (IN)

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$

Onde **n** representa o elemento genérico do conjunto.

O conjunto dos números naturais possui alguns subconjuntos importantes:

- O conjuntos dos números naturais não nulos:

$\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$; $IN^* = IN - \{0\}$

- O conjuntos dos números naturais pares:

$\mathbb{N}_p = \{0,2,4,6,\ldots,2n,\ldots\}$, com $n \in IN$

- O conjunto dos números naturais ímpares:

$\mathbb{N}_i = \{1,3,5,7,9,\ldots,2n+1,\ldots\}$, com $n \in IN$

O Conjunto dos Números Inteiros (Z);

$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Subconjuntos do Conjunto dos Números Inteiros:

- Conjuntos dos números inteiros não nulos:,

$\mathbb{Z}^* = \{ \ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots \}$

- Não negativos:

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots \}$

- Não positivos:

$\mathbb{Z}_{-}$ = { ..., -4, -3, -2, -1, 0}

O conjuntos dos Números Racionais (Q);

O conjunto dos números racionais é inicialmente descrito como o conjunto dos quocientes entre dois números inteiros:

$\mathbb{Q}$ = $\left\{0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \ldots, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{2}{5}, \ldots, \frac{p}{q}, \ldots\right\}$ com p e q inteiros e $q \neq 0$.

O Conjunto dos Números Irracionais ($\mathbb{I}$)

Assim como existem números decimais que podem ser escritos como frações, com numerador e denominador inteiros – os números racionais, que acabamos de ver –, há os que não admitem tal representação. São os números não exatos que possuem representação infinita não periódica.

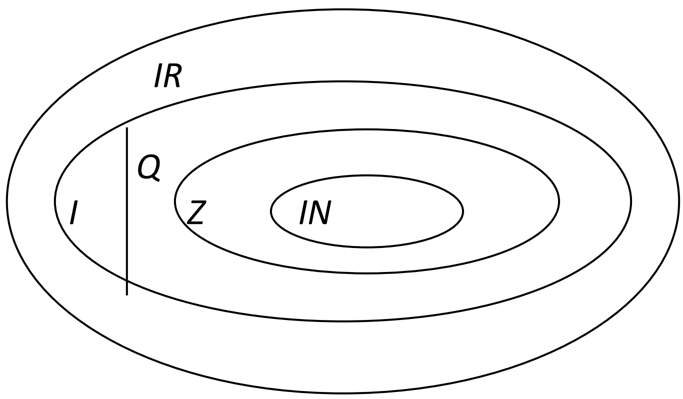
Vejamos alguns exemplos:

1. O número 0,212112111... não é dízima periódica, pois os algarismos após a vírgula não se repetem periodicamente.
2. O número 1,203040..., também não comporta representação fracionária, pois não é dízima periódica.
3. Os números $\sqrt{2}$ =1,4142136..., $\sqrt{3}$ =1,7320508... e π = 3,141592..., por não apresentarem representação infinita periódica, também não são números racionais.

Um número cuja representação decimal infinita não é periódica é chamado ***número irracional***, e seu conjunto é representado por *I*

O Conjuntos dos Números Reais ($\mathbb{R}$)

O conjunto formado pelos números racionais e pelos números irracionais é chamado *conjunto dos números reais* e é representado por *IR*.



Além desses (*IN, Z, Q, IN*), o conjunto dos números reais apresenta outros subconjuntos importantes.

1º O conjuntos dos números reais não nulos:

$\mathbb{R}_* = \{x \in IR \ / \ x \neq 0\}$

2º O conjuntos dos números reais não negativos:

$\mathbb{R}_+ = \{x \in IR \ / \ x \geq 0\}$

3º O conjuntos dos números reais positivos

$IR^*_+ = \{x \in IR \ / \ x > 0\}$

3º O conjuntos dos números reais não positivos:

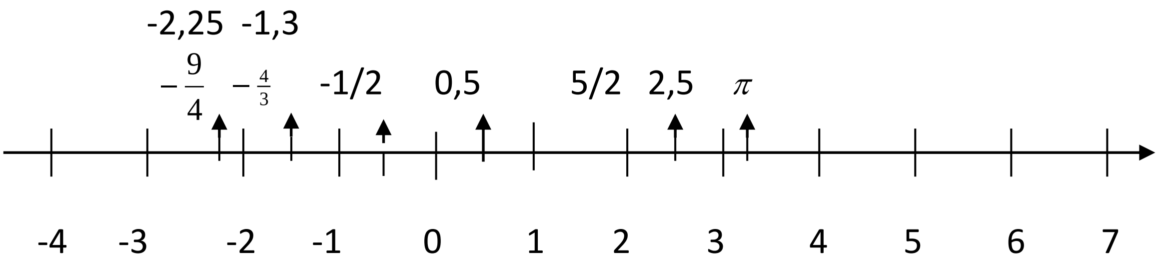
$IR_- = \{x \in IR \ / \ x \leq 0\}$

4º O conjuntos dos números reais negativos:

$IR_- = \{x \in IR \ / \ x < 0\}$

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS REAIS

Um exemplo de reta real, com alguns números racionais (inteiros ou não).



SIMBOLOGIAS

$>$: maior que
$<$: menor que
$\geqslant$: maior ou igual
$\leqslant$: menor ou igual
$=$: igual (equações)
$\neq$: diferente (inequações)
$\Rightarrow$: implica
$\cup$: união
$\cap$: intersecção
$\in$: pertence a
$\notin$: não pertence a
$+\infty$: infinito positivo
$-\infty$: infinito negativo
$\mathbb{N}$: números naturais
$\mathbb{Z}$: números inteiros
$\mathbb{Q}$: números racionais
$\mathbb{R}$: números reais

$\mathbb{I}$: números irracionais
$\sqrt{\square}$: raiz quadrada
$\sqrt[3]{\square}$: raiz cúbica
% : por cento
{} : conjunto vazio
° : grau
' : minuto
" : segundo
π : número pi
e : número e
i : número imaginário
$\rightarrow$: se, então
// : paralelas
/ : tal que
$\frac{\square}{\square}$: fração

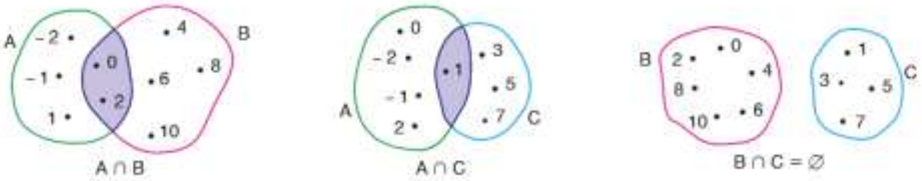
Interseção e reunião

EXEMPLO 1 **Interseção**

Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7\}$, temos:

- $A \cap B = \{0, 2\}$
- $A \cap C = \{1\}$
- $B \cap C = \varnothing$ (Note que **B** e **C** são conjuntos disjuntos.)

Os diagramas de Venn que representam os conjuntos $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ são:



EXEMPLO 2

De modo geral, indica-se por n(A) o número de elementos de um conjunto **A**. Assim, por exemplo, se $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$ e $D = \{2, 3, 4\}$, então:

- como $A \cap B = \varnothing$, ou seja, **A** e **B** são disjuntos, tem-se $n(A \cap B) = 0$;
- como $A \cap D = \{2\}$, tem-se $n(A \cap D) = 1$.

EXEMPLO 3 **REUNIÃO OU UNIÃO**

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{6, 7, 8\}$, $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $D = \{3, 4, 6, 8\}$, temos:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$
- $A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = C$
- $B \cup D = \{6, 7, 8, 3, 4\}$
- $A \cup (C \cup D) = A \cup \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

Propriedades da interseção e da reunião

Vamos admitir, sem demonstração, a validade de cada uma das seguintes propriedades. Quaisquer que sejam os conjuntos **A**, **B** e **C**:

- **Idempotente:** $A \cap A = A$ e $A \cup A = A$
- **Comutativa:** $A \cap B = B \cap A$ e $A \cup B = B \cup A$
- **Associativa:** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ e $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **Distributiva:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

EXEMPLOS

1 São dados os conjuntos $\boldsymbol{A = \{a, b, c\}}$, $\boldsymbol{B = \{c, d, f\}}$ **e** $\boldsymbol{C = \{a, f, g\}}$. Determine um conjunto **X**, sabendo que:

- **X** tem três elementos e $\mathbf{X} \subset \{a, b, c, d, f, g\}$;
- $A \cap X = \{c\}$, $B \cap X = \{c, f\}$ e $C \cap X = \{f, g\}$

2 Seja D(x) o conjunto dos divisores positivos do número inteiro **x**. Determine $D(18) \cap D(24)$

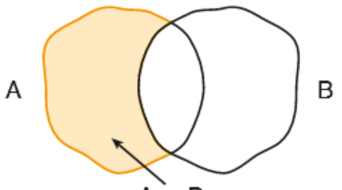
3 Dos 650 alunos matriculados em uma escola de idiomas, sabe-se que 420 cursam inglês, 134 cursam espamhol e 150 não cursam inlês nem espanhol. Determine o número de alunos que:

a) cursam inglês ou espanhol;
b) cursam inglês e espanhol;
c) cursam espanhol e não cursam inglês;
d) cursam apenas inglês ou apenas espanhol.

Diferença

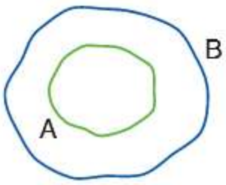
Dados os conjuntos **A** e **B**, podemos determinar um conjunto cujos elementos pertencem ao conjunto **A** e não pertencem ao conjunto **B**. Esse conjunto é chamado **diferença entre A e B** e indicado por A − B, que se lê "**A** menos **B**". Assim, define-se:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



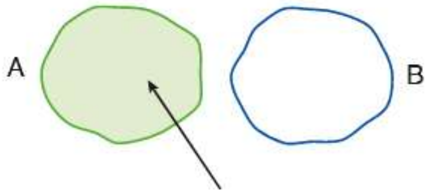
Há três casos particulares:

- $A \subset B$



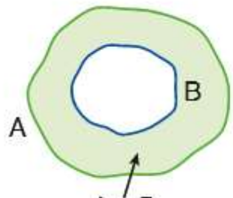
$A - B = \varnothing$

- **A** e **B** disjuntos



$A - B = A$

- $B \subset A$



$A - B$

EXEMPLO 4

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{2, 3\}$ e $D = \{0, 7, 8\}$, temos:

- $A - B = \{1, 2\}$
- $A - C = \{1, 4, 5\}$ (nesse caso, $A - C = \complement_A^C$, pois $C \subset A$).
- $B - A = \{6\}$
- $C - D = \{2, 3\}$, pois, como $C \cap D = \varnothing$, $C - D = C$.
- $C - A = \varnothing$, pois $C \subset A$.
- $D - D = \varnothing$
- $\complement_B^C$: não se define, pois $C \not\subset B$.

Exercícios do livro:

25 Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, d, e\}$, $C = \{c, d\}$ e $D = \{a, d, e\}$, classifique cada uma das sentenças seguintes em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

a) $A - B = \{b\}$

b) $B - C = \{a, e\}$

c) $D - B = \{c\}$

d) $\complement_A^C = \varnothing$

e) $\complement_B^{\varnothing} = \{a, c, d, e\}$

f) $\complement_B^D = \{c\}$

g) $(A \cap B) - D = \{a, d, e\}$

h) $B - (A \cup C) = \{e\}$

i) $(\complement_B^C) \cup (\complement_B^D) = \{a, c, e\}$

26 Dados os conjuntos $A = \{2, 4, 8, 12, 14\}$, $B = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ e $C = \{1, 2, 3, 18, 20\}$, determine:

a) $A - C$

b) $B - C$

c) $(C - A) \cap (B - C)$

d) $(A - B) \cap (C - B)$

27 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, determine o número de subconjuntos de $(A - B) \cap C$.