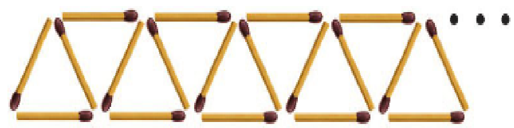
ESCOLA ESTADUAL FREDERICO JOSÉ PEDREIRA NETO		Turma: ______	Data: ____/____/____
PROFESSOR:	ALUNO (A):		

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Triângulos com palitos

Quantos palitos são necessários para formar cem triângulos?

Para o primeiro triângulo, precisamos de três palitos. Para formar o triângulo seguinte, precisamos acrescentar dois palitos. Para o próximo, mais dois palitos. E assim sucessivamente.



Então, para cem triângulos, são necessários:

$$3 + \underbrace{2 + 2 + 2 + \dots + 2}_{\text{99 vezes}}$$

$$3 + 99 \cdot 2 = 3 + 198 = 201 \text{ palitos}$$

No problema dos palitos, podemos formar uma sucessão numérica com as quantidades de palitos necessárias para fazer triângulos:

- para um triângulo → 3 palitos
- para dois triângulos → 5 palitos
- para três triângulos → 7 palitos
- para quatro triângulos → 9 palitos

E assim por diante, para cem triângulos precisamos de 201 palitos. Escrevendo na ordem para obter 1, 2, 3, 4, …, 100 triângulos, os números de palitos necessários formam a **sucessão** (ou **sequência**):

$$(3, 5, 7, 9, \dots, 201)$$

Usamos parênteses para indicar que os números (denominados **termos** da sucessão) estão seguindo uma ordem:

- o primeiro termo da sequência é 3;
- o segundo termo é 5 e, assim por diante, o centésimo e último termo é 201.

Essa é uma sequência com cem termos.

Partindo do primeiro termo, 3, e adicionando 2 a cada termo, obtemos o termo seguinte:

$$3 + 2 = 5 \qquad 5 + 2 = 7 \qquad 7 + 2 = 9 \quad \text{etc.}$$

Dizemos, por isso, que essa sequência é uma **progressão aritmética**.

> Chamamos de **progressão aritmética (P.A.)** toda sequência de números em que, somando uma mesma constante *r* a cada termo, obtemos o termo seguinte. Essa **constante *r*** é denominada **razão** da P.A.

Uma P.A. pode ser finita (quando tem um número finito, determinado, de termos) ou infinita. Indicamos:

P.A. finita: $(a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4, \; \ldots, \; a_n)$

4º termo: a_4

1º termo: a_1 2º termo: a_2 3º termo: a_3 último termo (enésimo termo): a_n

n = número de termos

$$\text{razão } r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots$$

Um exemplo de uso da PA na prática:

Uma criança anêmica pesava 8,3 Kg. Iniciou um tratamento médico que fez com que se engordasse 150 g por semana durante 4 meses, logo quanto pesava ao término da 15ª semana de tratamento?

Resolvendo aritmeticamente, temos:
150g x 15 = 2 250g = 2,25kg
8,3 kg + 2,25 kg = **10,55 kg**

Problemas desse tipo onde há um valor inicial: 8,3 kg que chamaremos de primeiro termo (a_1), um aumento constante: 150g chamado de (r) e um número de acréscimo: 16 – 1, número de termos menos 1 (n – 1) são resolvidos com maior abrangência, usando a expressão do termo genérico da progressão aritmética:

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

Onde a_n neste caso é a_{16}
$a_{16} = 8300 + (16 - 1).150 = 10\ 550g = 10{,}55kg$
Definição: P.A. é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior mais uma constante (Chamada razão).

LEI DE RECORRENCIA
Muitas vezes conhecemos o primeiro termo de um sequência e uma lei que permite calcular cada termo a_n a partir de seus anteriores: $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1$.
Quando isso ocorre, dizemos que a sequência é determinada por uma **lei de recorrência**.
1º Exemplo:
Vamos construir a sequência definida pela relação:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{a+1} = 2.a_n, para\ n \in N, n \geq 1 \end{cases}$$

A segunda sentença indica como obter *a*, a partir de a_2 a partir de a_1, a_3 a partir de a_2, a_4 a partir de a_3, etc. Para isso, é preciso atribuir valores de *n*:
$n = 1 \rightarrow a_2 = 2 \,.\, a_1 = 2 \,.\, 1 = 2$
$n = 2 \rightarrow a_3 = 2 \,.\, a_2 = 2 \,.\, 2 = 4$
$n = 3 \rightarrow a_4 = 2 \,.\, a_3 = 2 \,.\, 4 = 8$
$n = 4 \rightarrow a_5 = 2 \,.\, a_4 = 2 \,.\, 8 = 16$

Assim a sequência procurada é (1, 2, 8, 16, **. . .**)

SOMA DOS *n* PRIMEIROS TERMOS DE UMA P.A.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Obs: Em uma P.A., a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos termos extremos.
1º Exemplo: Calcule a soma dos dez primeiros termos da P.A. (38, 42, 46, **. . .**)
Veja a resolução no quadro. Com atenção.

2º Exemplo: Em relação à sequencia dos números naturais ímpares, calcule a soma dos 50 primeiros termos.
Veja a resolução no quadro. Com atenção.

Abra seu livro e faça os exercícios da página 203 os nº 38 à 42 (Copiar e responder)

PROGRESSÃO GEOMÉTRIA

Um exemplo de uso da PG na prática:

Uma divida de R$ 2 000,00 é aumentada mensalmente de 10%. Qual será o valor da dívida depois de 5 meses?
Valor inicial: 2 000
Depois de:
1 mês: 2000 + 10% de 2000 = 2000 $\left(1 + \frac{10}{100}\right) = 2000.(1{,}1) = 2\ 200{,}00$
2 meses: 2000 + 10% de 2200 = 2200$\left(1 + \frac{10}{100}\right) = 2200.(1{,}1) = 2\ 420{,}00$
3 meses: 2420 + 10% de 2420 = 2420$\left(1 + \frac{10}{100}\right) = 2420.(1{,}1) = 2\ 662{,}00$
4 meses: 2662 + 10% de 2662 = 2662$\left(1 + \frac{10}{100}\right) = 22662.(1{,}1) = 2\ 928{,}20$
5 meses: 2928,20 + 10% de 2928,20 = 2920,20 **.** (1,1) = 3 221,02

Resposta: O valor da divida será de R$ 3 221,02

Perceba que a divida em um determinado mês é igual à divida do mês anterior multiplicada por 1,1 (chamado de razão da sequência e indicada por **q**). Generalizando para uma sequência com **n** termos, temos:

$$a_n = a_1 \,.q^{(n-1)}$$

Definição: P.G. é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante **q** (Chamada razão).

A razão pode ser qualquer número racional (positivos, negativos, frações, exceto o zero). Para descobrir qual a razão de uma PG, basta escolher qualquer número da sequência, e dividir pelo número anterior.

Exemplos:
1. (3, 6, 12, 24, **. . .**)
2. (100, 50, 25, **. . .**)
3. (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ...), onde a razão é 2

As PG's podem ser divididas em quatro tipos, de acordo com o valor da razão:

Oscilante (q < 0)
Neste tipo de PG, a razão é negativa, o que fará com que a sequência numérica seja composta de números negativos e positivos, se intercalando.

(3,-6,12,-24,48,-96,192,-384,768,...), onde a razão é -2

Crescente (q > 0)
Na PG crescente, a razão é sempre positiva, e por isto a sequência será formada por números crescentes, como:

(1, 3, 9, 27, 81, ...), onde a razão é 3

Constante
Nesta PG, a sequência numérica tem sempre os mesmos números. Para isso, a razão deve ser sempre 1:

(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, ...) onde a razão é 1

Decrescente
As progressões geométricas decrescentes tem a razão sempre positiva e diferente de zero, e os números da sequência são sempre menores do que o número anterior:

(64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, ..) razão = 1/2
(-1, -3, -9, -27, -81, ...) onde a razão é 3 (observe que na PG crescente temos um exemplo com a mesma razão, porém o número inicial aqui é negativo, alterando toda a sequência)

SOMA DOS n PRIMEIROS TERMOS DE UMA P.G.

$$S_n = \frac{q_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

No caso do q = 1 a formula deduzida não pode ser aplicada, pois anula o denominador. Nesse caso, todos os termos da P.G. sõa iguais e, para calcular a soma de seus *n* primeiros termos, basta fazer:

$$S_n = n\,.a_1$$