| ESCOLA ESTADUAL<br>FREDERICO JOSÉ PEDREIRA NETO | Turma:_______ | VALOR:___ pontos<br>Data: ____/____/____ |
|---|---|---|
| **PROFESSOR:** | **ALUNO (A):** | |

**EQUAÇÃO E FUNÇÃO EXPONENCIAL**

- Para trabalhar com EXPONECIAIS deveremos fazer uma revisão sobre **Potenciação e Radiciação**

## Potência com expoente natural

Seja *a* um número real positivo e *n* um número natural não nulo. Então:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n fatores}}$$

*a* é a base da potência, e *n* é o expoente. Lê-se: "*a* elevado a *n*".

Para n = 1, temos que $a^1 = a$, pois não existe multiplicação com apenas um fator.

**Exemplos:**

a) $\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{\text{5 vezes}} = 4^5$

b) $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$ (5 elevado ao quadrado é igual a 25)

c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ $\left(\frac{1}{2}\right.$ elevado ao cubo é igual a $\left.\frac{1}{8}\right)$

d) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$ (3 elevado a 5 é igual a 243)

e) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6 = 1\,000\,000$ (10 elevado a 6 é igual a 1 milhão)

Dentre todas as potências, as de base 10 destacam-se e recebem nomes e símbolos especiais, como mostra o quadro:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

| Potência | Valor | Prefixo | Símbolo |
|---|---|---|---|
| $10^{-9}$ | 0,000000001 (um bilionésimo) | nano | η |
| $10^{-6}$ | 0,000001(um milionésimo) | micro | μ |
| $10^{-3}$ | 0,001(um milésimo) | mili | m |
| $10^{3}$ | 1 000 (mil) | kilo | k |
| $10^{6}$ | 1 000 000 (um milhão) | mega | M |
| $10^{9}$ | 1 000 000 000 (um bilhão) | giga | G |

## Propriedades das potências

Sejam *m* e *n* inteiros e não nulos e *a* um número real positivo.

| Propriedades das potências | | |
|---|---|---|
| $P_1$ | $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ | Produto de potências de mesma base: mantém-se a base e adicionam-se os expoentes. |
| $P_2$ | $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$ | Divisão de potências de mesma base: mantém-se a base e subtraem-se os expoentes. |
| $P_3$ | $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ | Para expoentes iguais, o produto das potências é igual à potência do produto. |
| $P_4$ | $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$, $b \neq 0$ | Para expoentes iguais, a divisão das potências é igual à potência da divisão. |
| $P_5$ | $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ | Potência de potência: mantém-se a base e multiplicam-se os expoentes. |
| $P_6$ | $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $n \neq 0$ | Potência de expoente fracionário. *Uma potência de expoente fracionário é um radical.* |

**Exemplos:**

a) $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$

b) $\frac{5^4}{5^3} = 5^{4-3} = 5^1 = 5$

c) $2^2 \cdot 5^2 = (2 \cdot 5)^2 = 10^2 = 100$

d) $\frac{4^4}{2^4} = \left(\frac{4}{2}\right)^4 = 2^4 = 16$

e) $(2^3)^2 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$

f) $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt{a}$

Observe que, para $a \leqslant 0$, algumas potências de base *a* são definidas e outras não.

**Exemplos:**

a) $(-8)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{-8} = \notin \mathbb{R}$

b) $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$

c) $0^5 = 0$

d) $0^{-2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} = \notin \mathbb{R}$

## Radiciação em $\mathbb{R}$

## Propriedades dos radicais

| Propriedades da radiciação | |
|---|---|
| $P_1$ | $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ |
| $P_2$ | $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ |
| $P_3$ | $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ |
| $P_4$ | $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$ |
| $P_5$ | $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a^m}} = \sqrt[n \cdot k]{a^m}$ |

**Exemplos:**

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$ $(P_1)$

b) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{4}} = \sqrt[4]{\frac{32}{4}} = \sqrt[4]{8}$ $(P_2)$

c) $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5^1} = \sqrt[3]{5}$ $(P_3)$

d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^3} = \sqrt{2}$ $(P_4)$

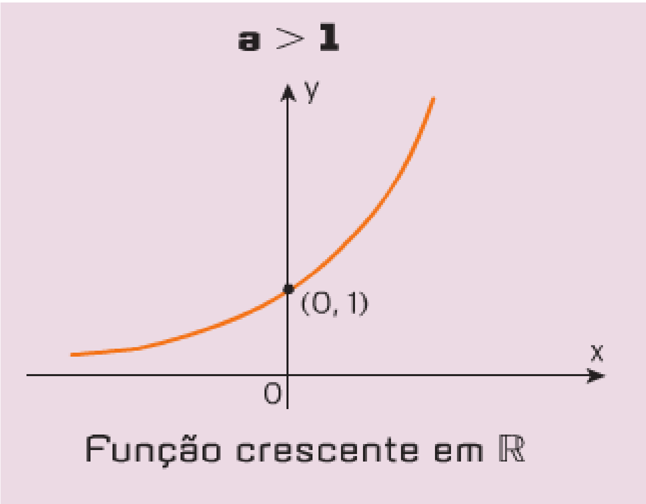
e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^5}} = \sqrt[3 \cdot 4]{2^5} = \sqrt[12]{2^5} = \sqrt[12]{32}$ $(P_5)$

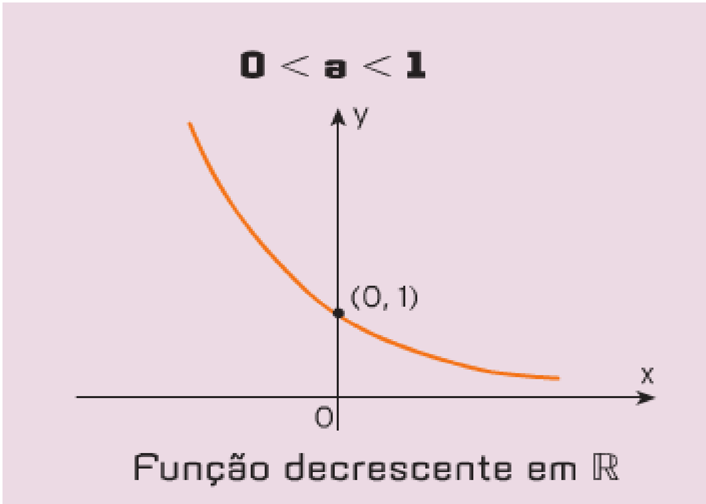
# FUNÇÃO EXPONENCIAL

A Função Exponencial é qualquer função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$, onde $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$.

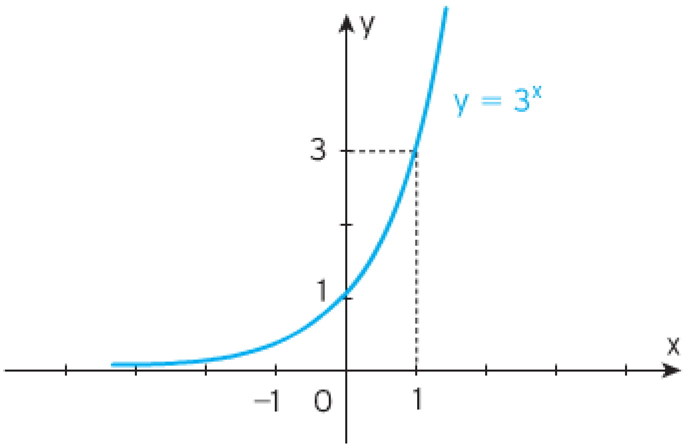
**Se $a>1$, a exponencial é crescente; se $0 < a < 1$, é decrescente.**

Observe os gráficos das seguintes funções exponenciais:

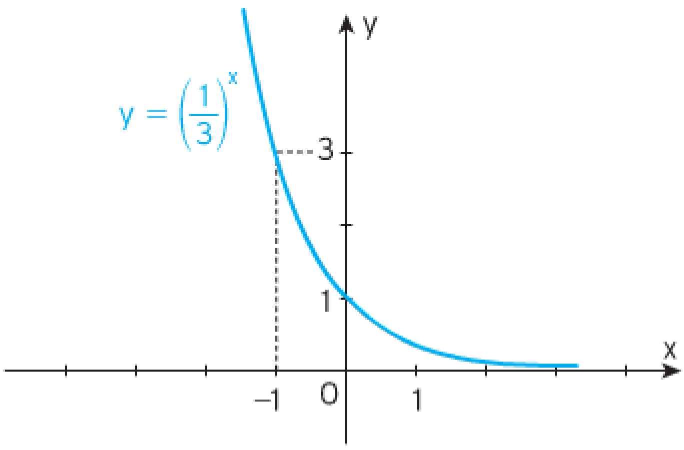



a)

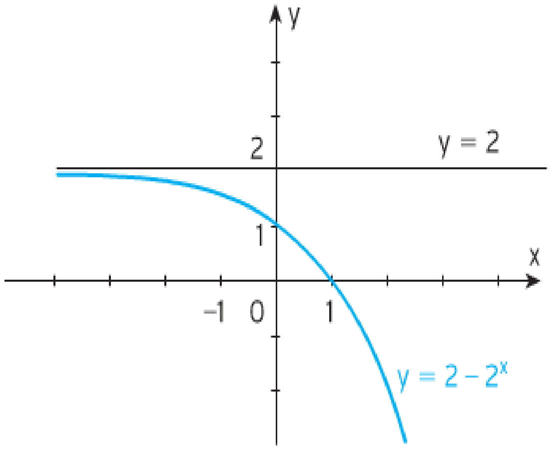



b)



# Equações exponenciais

c)




Exemplos:

a) $2^x = 128$

b) $2^x - 2^{x-1} + 2^{x+2} = 9$

c) $2^x \cdot 3 = 3^x \cdot 2$

d) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

**Copie estes exemplos abaixo, que será resolvido no quadro.**

**a)** $\mathbf{2^{x-3} = 32}$ **c)** $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$ **e)** $0,5^x = \frac{1}{16}$

**b)** $(0,25)^x = \sqrt{2}$ **d)** $\left(\sqrt{2}\right)^x = 64$ **f)** $(3^x)^{x+1} = 729$

**g.** Resolva a equação $5^{x^2} \cdot 5^{-4x} = 3125$.

***Resolução***

Como $3125 = 5^5$ e pela propriedade da função exponencial $5^{x^2} \cdot 5^{-4x} = 5^{x^2-4x}$, então a equação inicial se reduz a:

$5^{x^2-4x} = 5^5 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = -1$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{5, -1\}$.

**h.** Resolva a equação $2^x \cdot 27 = 3^x \cdot 8$.

***Resolução***

Isolando no 1º membro as potências com a incógnita *x*, obtemos:

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{8}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Leftrightarrow x = 3$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{3\}$.

**i.** Resolva a equação $2^{x+1} + 2^x - 2^{x-2} = 88$.

***Resolução***

Fatorando o 1º membro, e lembrando que $2^{x+1} = 2^x \cdot 2$ e $2^{x-2} = 2^x \cdot 2^{-2}$, temos:

$2^x(2 + 1 - 2^{-2}) = 88 \Leftrightarrow 2^x \cdot \frac{11}{4} = 88 \Leftrightarrow 2^x = 2^5 \Leftrightarrow x = 5$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{5\}$.

**j.** Resolva a equação $5^{2x} - 23 \cdot 5^x - 50 = 0$.

***Resolução***

Nesse caso, observe que aparecem $5^{2x} = (5x)^2$ e $5^x$, temos então uma equação do 2º grau em $5^x$.

Fazendo $5^x = y$, temos $y > 0$ e

$y^2 - 23y - 50 = 0 \Leftrightarrow y = -2$ ou $y = 25$

$y = -2$ não serve, pois não satisfaz a condição $y > 0$.

Substituindo $y = 25$ em $5^x = y$, obtemos: $5^x = 5^2 \Leftrightarrow x = 2$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{2\}$.

## LOGARÍTMOS

### NOÇÕES BÁSICA DE LOGARITMOS

**Logaritmo de um número a numa base b é o expoente c ao qual eleva-se essa base resultando a.**

$$\log_b a = c \iff b^c = a$$

a = logaritimando ou antilogaritimo
b = base
c = logaritmo

## CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA

$$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \end{cases} \quad \log_b{}^a = c$$